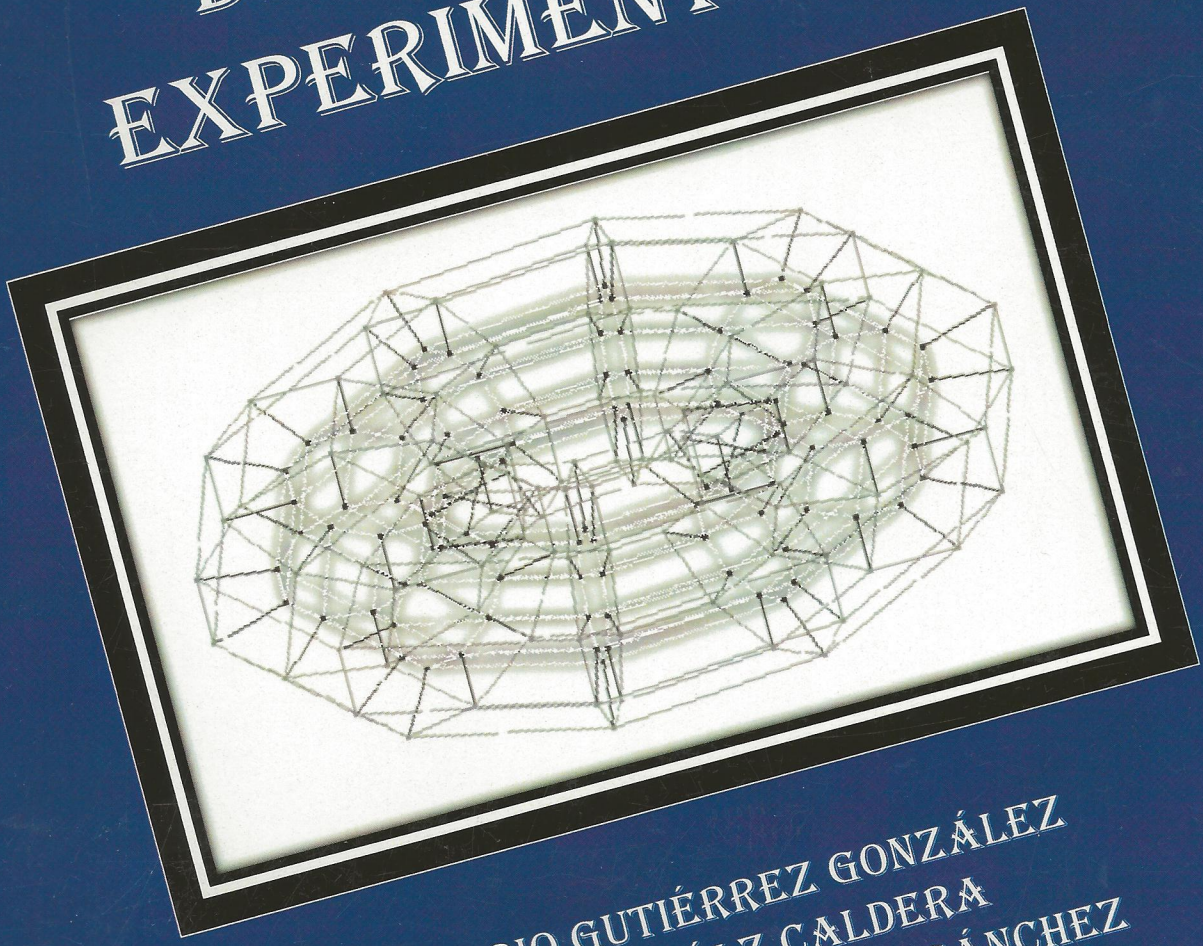
ELEMENTOS DE DISEÑO DE EXPERIMENTOS



PORFIRIO GUTIÉRREZ GONZÁLEZ
LIZBETH DÍAZ CALDERA
MARÍA DE JESÚS GUZMÁN SÁNCHEZ

astra
ediciones

Elementos de Diseño de Experimentos

Porfirio Gutiérrez González
Lizbeth Díaz Caldera
María de Jesús Guzmán Sánchez

astra
ediciones

Autores:

Porfirio Gutiérrez González
Lizbeth Díaz Caldera
María de Jesús Guzmán Sánchez

Elementos de Diseño de Experimentos

Depósito Legal Núm: 03-2009-032511222300-01
I.S.B.N 978-607-7772-02-6

Edición publicada por:
Astra Ediciones, S.A. de C.V.
Valle de los Cedros 2837-1,
Col. Jardines del Valle.
C.P 45138.
Zapopan, Jalisco.
Tel. (33) 38.32.91.49 / 36 33 36 65
01 800 821 57 27
e-mail: grupoastra@prodigy.net.mx
Copyrigth © 2009

Todos los derechos reservados conforme a la ley. Las características de esta edición, así como su contenido son propiedad de **Astra Ediciones, S.A. de C.V.**, no pudiendo reproducir ninguna parte de este libro o transmitirse bajo ninguna forma o por ningún medio, electrónico ni mecánico, incluyendo fotocopiadora y grabación, ni por ningún sistema de almacenamiento y recuperación de información sin permiso por escrito del editor.

Miembro de la Cámara Nacional de la Industria Editorial Mexicana No. 3368

Impreso en México- Printed in México

Prefacio

Un problema fundamental en la enseñanza- aprendizaje de una materia es que no se cuentan con un libro adecuado al programa. Un libro que le sea útil al profesor en su enseñanza del curso y al mismo tiempo le permita implementar estrategias de enseñanza. Un libro que le facilite el conocimiento al estudiante y le evite la realización engorrosa de apuntes. Esos son los objetivos del presente texto, el ser un recurso didáctico que auxilie en la enseñanza a los profesores que imparten la materia de Elementos de Diseño de Experimentos, de la Universidad de Guadalajara. El libro está estructurado con siete capítulos cuyo orden sistemático representa una guía-metodológica de la enseñanza del curso, misma que es resultado de la experiencia de años por los autores con la cual se han obtenido magníficos resultados. Los Capítulos contenidos en este texto son: El Capítulo 1: Introducción Al Diseño De Experimentos, donde se habla de los principios del diseño de experimentos y sus directrices. El Capítulo 2: Diseño de un Solo Factor, en el que se incluye los procedimientos del análisis de varianza y las pruebas de comparación múltiple. El Capítulo 3 se encuentra el Diseño En Bloques Aleatorizados, con su respectivo Anova, modelo y supuestos. El Capítulo 4 corresponde al Diseño Multifactorial Para Dos Factores donde además del Anova se incluye el concepto de interacción de factores. En el Capítulo 5 es para el Diseño Multifactorial Para Tres Factores, con un amplio contenido de tablas y procedimientos que facilitan la obtención del Anova. Los Diseños 2^2 y 2^3 corresponden a los capítulos 6 y 7, respectivamente, en ambos diseños se ilustran los cálculos y sus aplicaciones mediante ejemplos resueltos. Al final de cada capítulo hemos agregado salidas de resultados usando el Statgraphics Centurión.

Esperamos que con este texto, los estudiantes encuentren en el texto una guía de aprendizaje, un complemento de la enseñanza de su profesor con una serie de ejercicios que les permita practicar lo aprendido.

Los autores

Índice

Prefacio **7**
Contenido **9**

Capítulo I. Introducción al diseño de experimentos **17**
1 . 1 Introducción al diseño de experimentos 17
1.2 La variación y la investigación 18
1.3. Principios básicos del diseño de experimentos 19
1.4 Metodología general 20
1. Identifique claramente la situación a resolver 20
2. Identificar variables 21
3. Definir el diseño 22
4. Efectuar el experimento 22
5. Análisis de los datos 22
6. Conclusiones y toma de decisiones 22
1. 5 Aplicación del diseño de experimentos 22
1. 6 Lista de comprobación para planear programas de pruebas 23

Capítulo II. Diseño de un solo factor **27**
2.1 Introducción a los diseños unifactoriales 27
2.2 Diseño Unifactorial 27
2.2 Análisis estadístico de efectos fijos de un solo factor (ANOVA) 28
2.2.1 Estimación de la suma de cuadrados total 28
Grados de libertad de la suma de cuadrados totales 29
2.2.2 Estimación de la suma de cuadrados de los tratamientos 29
Grados de libertad de la suma de cuadrados tratamientos 30
2.2.3 Estimación de la suma de cuadrados el error o residual 30
Grados de libertad de la suma de cuadrados del error 31
2.2.4 Estimación de los cuadrados medios 31
2.2.5 Estimación del cuadrado medio de los tratamientos 31
2.2.6 Estimación del cuadrado medio del error 31
2.2.7 Obtención del la F calculada o de la F0 31
2.2.8 Tabla del análisis de varianza para el diseño unificatorial 31
2.2.9 Obtención de la F de tablas F(tablas) 32
2.2.10 Comparación de la F de tablas con la F-calculada 32
2.3 Pruebas de rangos multiples 32
2.3.1 Prueba de LSD: Prueba de la mínima diferencia significativa 32
2.3.2 Prueba de intervalos múltiples de Duncan 35
2.3.3 Prueba de Tukey 36
2.4 Supuestos del modelo unifactorial 38
2.4.1 Supuesto de varianza constante 38
2.4.2 Supuesto de independencia 39

2.4.3 Supuesto de normalidad 41
2.5 Captura de datos y salida de resultados del ejemplo 2.1 usando el statgraphics centurion XV 43
2.5.1 Captura de datos del ejemplo 2.1 43
2.5.2 Análisis de Varianza 43
2.5.3 Prueba de LSD 44
2.5.4 Chequeo de Supuestos 44
2.5.4.1 Varianza constante en los residuos 44
2.5.4.2 Independencia 45
2.5.4.3 Normalidad 45
2.6 Ejercicios 46

Capítulo III. Diseño en bloques aleatorizados 57
3.1 Introducción 57
Ejemplo 3.1 57
3.2 Análisis estadístico del diseño por bloques aleatorizados (ANOVA) 58
3.2.1 Estimación de la suma de cuadrados total 58
Grados de libertad de la suma de cuadrados totales 59
3.2.2 Estimación de la suma de cuadrados de los tratamientos 59
Grados de libertad de la suma de cuadrados tratamientos 60
3.2.3 Estimación de la suma de cuadrados de los bloques 60
3.2.4 Estimación de la suma de cuadrados del error o residual 61
3.2.5 Estimación de los cuadrados medios 61
3.2.6 Estimación del cuadrado medio de los tratamientos 61
3.2.7 Estimación del cuadrado medio del bloque 62
3.2.8 Estimación del cuadrado medio del error 62
3.2.9 Obtención de la F calculada o de la F0 62
3.2.10 Tabla de análisis de varianza para el diseño por bloques 62
3.2.11 Obtención de la F de tablas F(tablas) 63
3.2.12 Comparación de la F de tablas con la F-calculada 63
3.3 Prueba de LSD: Prueba de la mínima diferencia significativa 63
3.4 Supuestos del modelo de bloques aleatorizados 65
3.4.1 Supuesto de varianza constante 67
Gráfica de residuales vs los niveles del factor 67
3.4.3 Supuesto de independencia 67
Residuales vs orden de corrida (o secuencia de tiempo) 68
3.4.2 Supuesto de normalidad 68
3.5 Captura de datos y salida de resultados del ejemplo 3.1 usando el statgraphics centurion XV 71
3.5.1 Captura de datos del ejemplo 3.1 71
3.5.2 Análisis de Varianza 71
3.5.3 Prueba de LSD para los detergentes 72
3.5.4 Chequeo de supuestos 72
3.5.4.1 Varianza constante en los residuos 72
3.5.4.2 Independencia en los residuos 73
3.5.4.3 Normalidad en los residuos 73
3. 6 Ejercicios 73

Capítulo IV. Experimentos de dos factores 79
4.1 Principios y definiciones básicas 79
4. 2 Ejemplo 80
4.2.1 Análisis de varianza 81
4. 3.2 Cálculo de la tabla de análisis de varianza 82
4.3.3 Prueba de mínima diferencia significativa LSD 87
4.3.3.1 Prueba de LSD para el efecto simple de la concentración (Factor A) 88
4.3.3.2 Prueba de LSD para el efecto simple de la temperatura (Factor B) 89
4.3.4 Graficas de interacción 91
4.3.4.1 Gráfica de interacciones para la temperatura y la concentración 91
4.3.4 Conclusión del problema 92
4.4 Captura de datos y salida de resultados del ejemplo 4.1 usando el statgraphics centurion XV. 93
4.4.1 Captura de datos del ejemplo 4.1 93
4.4.2 Análisis de varianza 93
4.4.3 Pruebas de LSD 94
4.4.3.1 Prueba de LSD para el efecto de concentración 94
4.4.3.2 Prueba de LSD para el efecto de concentración 94
4.4.4 Grafica de interacción entre la concentración y la temperatura 95
4.5 Ejercicios 95

Capítulo V. Experimentos de tres factores 103
5.1 Introducción 103
5. 2 Ejemplo 5.1 103
Modelo matemático: 104
Planteamiento de las hipótesis: 104
5.3 Ecuaciones para la obtención del análisis de varianza 105
5.3.1 Obtención de la suma de cuadrados total 107
5.3.2 Suma de cuadrados del efecto simple de la temperatura (FACTOR A) 107
5.3.3 Suma de cuadrados para operario (FACTOR B) 108
5.3.4 Suma de cuadrados para el factor C (TIEMPO DE CICLO) 109
5.3.5 Suma de cuadrados para la interacción AB (INTERACCIÓN DE TEMPERATURA CON EL OPERARIO) 110
5.3.6 Suma de cuadrados de la interacción AC (INTERACCIÓN DE TEMPERATURA Y TIEMPO DE CICLO) 111
5.3.7 Suma de cuadrados para la interacción BC (INTERACCIÓN DE OPERARIO-TIEMPO DE CICLO) 112
5.3.8 Sumas de cuadrados para la interacción ABC (INTERACCIÓN DE TEMPERATURA-OPERARIO-TIEMPO DE CICLO) 113
5.3.9 Sumas de cuadrados del error 115
5.3.10 Los cuadrados medios 115
5.3.11 Obtención de las F-calculadas o Fo. 116
5.3.12 Obtención de la F(tablas) 117
5.3.13 Comparaciones de la F-calculada y la F-tablas. 118
5.3.14 Interpretación del ANOVA: 119
5.4 Prueba de mínima diferencia significativa LSD 119

5.4.1 Prueba LSD para temperatura 119
5.4.2 Prueba LSD para operario 120
5.4.3 Prueba LSD para tiempo de ciclo 120
5.5 Gráficas de interacciones 120
5.6 Conclusión 121
5.7 Captura de datos y salida de resultados del ejemplo 5.1 usando el Statgraphics centurion XV 122
5.7.1 Captura de datos del ejemplo 5.1 122
5.7.2 Análisis de varianza 122
5.7.3 Pruebas de LSD 123
5.7.3.1 Prueba de LSD para el efecto de operario 123
5.7.3.2 Prueba de LSD para el efecto de operario 123
5.7.3.3 Prueba de LSD para el efecto de tiempo de ciclo 123
5.7.8 Gráficas de interacciones significativas 124
5.7.8.1 Gráficas de interacciones Operario-Tiempo de ciclo 124
5.7.8.1 Gráficas de interacciones Temperatura-Tiempo de ciclo 124
5.8 Ejercicios 124

Capítulo VI. Diseño factoriales 2^k 131
6.1 Diseños factoriales Diseños 2^k 131
Tabla de ejemplos de tipo de factores 131
6.2 Aplicación del diseño 2^k 131
6.3 El diseño 2^2 132
6.3.1 Ejemplo 132
6.3.2 Presentación de datos y etiquetación de niveles 132
6.3.3 Análisis de problema 133
6.4 Solución estadistica del diseño 2^2 134
6.5 Captura de datos y salida de resultados del ejemplo 143
6.3.1 Usando el statgraphics centurion XV 143
6.5.1 Captura de datos en el Statgraphics 143
6.5.2 Tabla de efectos promedio 143
6.5.3 Pareto normal 143
6.5.4 Análisis de Varianza 144
6.5.5 Gráficas de efectos principales 144
6.5.5.1 Gráfica de efecto principal para concentración 144
6.5.5.2 Gráfica de efecto principal para catalizador 145
6.6 Ejercicios 145

Capítulo VII. Diseño factoriales 2^3 149
7.1 El diseño 2^3 149
7.2 Ejemplo 7.1 149
7.2.1 Análisis del problema 150
Establecimiento del modelo estadístico y las hipótesis. 150
7.3 Solución estadística del diseño 2^3 152
Gráficas de efectos promedio para los efectos simples significativos 158

Gráfica de promedios para la configuración (factor B) 159
Gráfica de promedios para el ángulo de corte (factor C) 161
Gráfica de interacción AB 162
7.4 Captura de datos y salida de resultados del ejemplo 164
7.1 usando el statgraphics centurion XV 164
7.4.1 Captura de datos en el Statgraphics 164
7.4.2 Efectos promedio 164
7.4.3 Pareto normal 165
7.4.4 Tabla de Anova 165
7.4.5 Gráficas de efectos principales 165
7.4.5.1 Gráfica para rapidez 166
7.4.5.2 Gráfica para concentración 166
7.4.5.3 Gráfica para ángulo 167
7.4.6. Gráficas de interacciones significativas 167
7.4.6. 1 Gráfica de interacción Rapidez-Configuración 167
7.5 Ejercicios 167

Anexo 169
Apendices 171

Introducción al diseño de experimentos

Capítulo I

Capítulo I

Introducción al diseño de experimentos

1.1 Introducción al diseño de experimentos

El diseño de experimentos es una "técnica estadística" que nos ayuda a identificar que factores o variables afectan el comportamiento de un proceso productivo y de esta manera poder mejorarlo.

Cuando somos capaces de identificar que factores y como influyen éstos en un sistema productivo, podemos tomar decisiones que efectivamente mejoren las características de calidad del producto o servicio. Podemos identificar también cuáles son realmente las fuentes de variación y poder reducir esta última en la búsqueda de la mejora continua.

El diseño de experimentos pretende planear, ejecutar y analizar el experimento de manera que los datos apropiados sean recolectados y que tengan validez estadística para poder obtener conclusiones válidas y útiles. Se entiende por validez estadística el que los resultados se puedan repetir consistentemente sobre todo en plena operación a gran escala.

El diseño de experimentos puede ser útil, tanto en la fase de diseño del producto o proceso como en la fase de control de procesos y se puede combinar las técnicas de diseños de experimentos con las técnicas básicas de control de calidad.

Cuando se usan experimentos pretendemos analizar el efecto de cambios que nosotros inducimos, más que analizar variaciones al azar y mediante un diagrama de causa-efecto, podemos identificar las posibles causas o factores que inciden en un efecto o respuesta específica, tal y como se muestra en la figura 1.

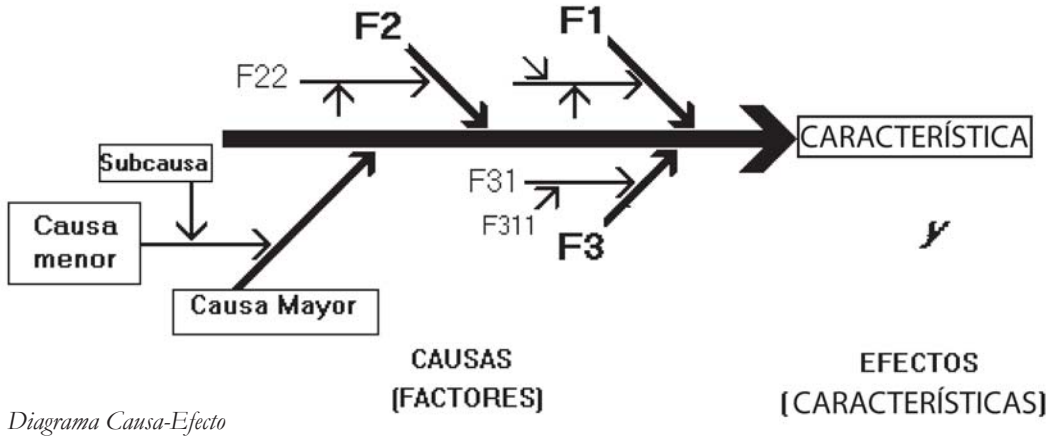


Figura 1. Diagrama Causa-Efecto

Mediante un experimento podemos inducir cambios en uno o varios factores (F_{22} F_{31} F_{311} por ejemplo), y analizar estadísticamente si el cambio de estos factores afecta o no el resultado del proceso.

Un experimento es un conjunto de pruebas estructurado y coherente que se analizan a fin de ganar entendimiento acerca del proceso y, no se debe confundir un experimento con una simple prueba o un grupo de pruebas desorganizadas. En varias ocasiones se ejecutan, estas últimas, con la idea de que algún método estadístico organice y/o interprete la información y al final nos encontramos con que estamos *"igual que al principio"*.

Un experimento es eficiente cuando se obtiene la información requerida con el mínimo consumo de recursos. Esto es, un experimento eficiente debe ser lo más simple y económico posible, pero efectivo. Las técnicas del diseño de experimentos pretenden que los experimentos sean eficientes.

1.2 La variación y la investigación

Cuando se lleva a cabo una investigación para evaluar fenómenos y/o procesos, el investigador controla determinadas variables independientes para determinar su efecto sobre una respuesta de interés, realizando mediciones. Sin embargo; esto no es sencillo debido a que existen fuentes de variación que pueden influir en los resultados que se obtienen.

Cuando somos capaces de identificar qué factores y cómo influyen éstos en un proceso [de manufactura, analítico o de servicios], se pueden tomar decisiones que mejoren las características de calidad del producto o servicio; también identificar cuáles son las fuentes de variación presentes para reducir la variación y lograr la mejora continua.

Las fuentes de variación comunes a todo proceso de manufactura son; metodología, mano de obra, máquinas, materiales y medio ambiente, mismas que se han generalizado a otro tipo de procesos y han dado origen a diversas metodologías, encaminadas a estudiarlas, entre ellas, el diagrama de causa efecto, 5M's.

La suma del efecto de estos factores presentes se denomina variación y se considera un componente inherente a toda medición comúnmente se le denomina error podemos representarla como sigue:

Resultado de una medición = Valor "verdadero" + Variación o error

El objetivo del análisis estadístico es medir la variabilidad presente en el experimento y el de los investigadores debe ser realizar experimentos con una variabilidad mínima. Para aislar e identificar las causas de variación se requiere de un diseño experimental específico para el problema y un análisis apropiado de ese diseño.

El proceso estadístico de toda investigación consta de tres fases: planteamiento, experimentación y análisis. El planteamiento implica formular una pregunta clara y adecuada a cerca del estudio a realizar, involucra los conocimientos técnicos y estadísticos. El diseño experimental es una consecuencia de las necesidades planteadas, implica qué y cómo se van a realizar las cosas. El análisis incluye los cálculos apropiados para el diseño realizado, la conclusión y la toma de decisiones.

1.3. Principios básicos del diseño de experimentos

Para que un experimento tenga validez estadística se deben observar los principios básicos:

- Reproducción
- Aleatoriedad
- Control local

Reproducción: Esto significa que las pruebas se puedan repetir bajo las mismas condiciones en más de una ocasión.

Por ejemplo, suponga que usted desea saber si un reactivo *X* de diferente marca (llámelas marca *A* y *B* respectivamente), producen o no el mismo rendimiento en una reacción, para esto usted realiza una reacción con el reactivo *A* obteniendo un rendimiento del 87%, enseguida realiza otra reacción con el reactivo *B* y se obtiene un rendimiento del 90%. ¿Podemos decir que el reactivo *B* es mejor que el reactivo *A*?

Por principio sabemos el concepto de variabilidad que nos dice que no hay dos cosas exactamente iguales, de manera que aún cuando se hubiera usado el mismo reactivo, se obtendrían resultados diferentes. Por lo tanto, ¿la diferencia observada en este caso es real, o se debe a un simple error aleatorio?, o más aún, a otro factor, como por ejemplo, diferente muestra utilizada, etc.

Para aclarar esto, es necesario tratar cada muestra con cada tipo de reactivo y cuantificar si la variación detectada se presenta consistentemente o no.

La reproducción por lo tanto es importante por al menos dos razones:

I) Permite cuantificar el error aleatorio inherente al proceso.

II) Permite una mejor estimación de los parámetros.

Aleatoriedad: Esto significa que, tanto el material asignado a una prueba en particular, como el orden en que se realizan las pruebas se efectúen de una manera aleatoria. Es decir, sin un orden predeterminado.

Suponga por ejemplo, que usted desea saber si la temperatura influye en el nivel de contaminación de un producto, medida ésta en mg/lt; para esto usted primero efectúa cuatro pruebas a una temperatura de 80 ºC y enseguida cuatro pruebas a 90 ºC, los resultados obtenidos son:

Temperatura	mg/lt	mg/lt	mg/lt	mg/lt	Promedio
80 ºC	2.2	2.8	3.2	3.6	2.95
90 ºC	3.4	3.9	4.3	4.7	4.07

A primera vista con una temperatura de 80 ºC se obtiene menor nivel de contaminación, sin embargo algo raro se observa, el nivel de contaminación siempre aumenta; esto se debe a que algunos residuos quedan en el equipo, lo que aumenta constantemente la contaminación del producto.

Esto se puede evitar lavando perfectamente el material, lo cual puede no ser físicamente posible. En lugar de esto podemos confundir, anular o igualar este efecto realizando las pruebas en orden aleatorio bajo las dos temperaturas.

Esto es de gran importancia práctica, piense usted en un diagrama causa-efecto con un gran número de factores afectando la característica de calidad; si usted desea analizar el efecto de uno solo o algunos factores, usted debería controlar y medir todos los otros factores y aún así no eliminaría el error aleatorio. En lugar de esto usted puede "confundir" o anular el efecto de estos factores no controlables al efectuar las pruebas siguiendo un orden aleatorio, es decir al azar.

La aleatoriedad por lo tanto es importante por al menos dos razones:

I) Confunde el efecto de factores no controlables.

II) Valida las pruebas estadísticas al hacer que los errores experimentales sean "estadísticamente independientes".

Control local: se refiere a la forma de agrupar las unidades experimentales (agrupamiento, bloqueo) y al balanceo. Permite reducir errores experimentales, por lo que le da eficiencia al experimento.

- *Agrupamiento:* Es la colocación de un conjunto de unidades experimentales homogéneas en grupos, de modo que los diferentes grupos puedan sujetarse a diferentes tratamientos, los cuales se asignan al azar.
- *Bloqueo:* Cuando las unidades experimentales son heterogéneas se agrupan de acuerdo a las características que tengan y/o al criterio del investigador en bloques, de tal manera que las unidades dentro de un bloque sean homogéneas así, la mayor parte de la variación predecible entre las unidades queda confundida con el efecto de los bloques. Al azar se asigna a cada una de las unidades un tratamiento diferente, dentro de cada bloque.
- *Balanceo:* Cuando se tienen igual número de réplicas para cada tratamiento o igual número de unidades experimentales se dice que el diseño es balanceado. Los diseños balanceados son más potentes.

1.4 Metodología general

Se sugieren varias metodologías en la literatura, la siguiente es una de ellas:

1. Identifique claramente la situación a resolver

Antes de poder planear un experimento necesitamos definir claramente qué es lo que estamos buscando. Aún cuando esto puede parecer trivial, en ocasiones es tanta la presión por tomar decisiones que corremos a experimentar sin por lo menos definir claramente nuestros objetivos.

En este paso es necesario definir que tipo de información es exactamente la que nos interesa, ya que no podemos medir o variar todos y cada uno de los componentes de un experimento. En ocasiones escuchamos que el experimento fue un éxito pero la calidad no mejoró.

Antes de planear un experimento, se debe de investigar y analizar el conocimiento y datos que ya se tengan sobre este problema. La participación activa del personal involucrado en el problema es de vital importancia en este paso.

En conclusión como resultado de este paso, la hipótesis a probar debe quedar bien definida. Un diagrama causa-efecto es una buena ayuda en este momento.

2. Identificar variables

En este paso dos tipos de variables se deben de identificar, variables dependientes y factores o variables independientes.

La *variable dependiente* o variable de respuesta es la característica de calidad que queremos mejorar y cuyo comportamiento deseamos conocer; ejemplos de ésta son: porcentaje de contaminación, satisfacción de un cliente, desgaste de una herramienta, tiempo de falla, etcétera.

Es deseable que una variable dependiente reúna las características siguientes:

- Cuantitativa
- Precisa
- Que tenga algún significado físico

Las *variables independientes* o factores representan aquellas causas o factores, cuyo efecto sobre la variable dependiente que se quiere analizar. Cada uno de estos factores se deberá probar al menos dos valores diferentes para evaluar su efecto. A cada uno de estos niveles se les llama tratamientos.

Por ejemplo, si queremos conocer el efecto de la temperatura sobre la dureza de un material y para ello se realizan pruebas a 70, 80 y 90 ºC; se dice que tenemos un experimento de un solo factor con tres tratamientos. Otra vez es de vital importancia la participación del personal involucrado en el problema a fin de seleccionar apropiadamente los factores o variables independientes y los niveles de cada factor o tratamiento de interés.

¿Cómo seleccionar los diferentes niveles? En general un factor puede ser cualitativo (proveedor, turno, operario, etc.) o cuantitativo (temperatura, presión, altura, tiempo, etc.). Los niveles específicos en cualquier caso se pueden seleccionar ya sea aleatoriamente dentro de un cierto rango o a un nivel fijo definido por el experimentador previamente; esto nos lleva a cuatro situaciones generales:

a) Factor fijo cualitativo. En este caso, de entre los diferentes niveles o tratamientos posibles para el factor, el experimentador está interesado en el efecto que ciertos niveles seleccionados por él previamente, tienen sobre la variable de respuesta. Además el factor es del tipo cualitativo.

Por ejemplo, si se tienen dos proveedores y se desea analizar el efecto de cada uno de los tres sobre la característica de calidad, o el efecto que tres turnos o dos procesos diferentes de producción, o dos analistas, tienen sobre la variable de respuesta.

La conclusión que se puede obtener en este caso es si la variable de respuesta es diferente o no para cada uno de los niveles o tratamientos que se analizan, o bien si el factor afecta la variable de respuesta para los niveles seleccionados. Los resultados no se pueden extender para todos los niveles posibles que no se hayan considerado en el experimento.

b) Factor fijo cuantitativo. Este caso es similar al anterior excepto que el factor es cuantitativo: por ejemplo, la temperatura, presión, tiempo, concentración de un componente, etc. Aquí es recomendable que los diferentes niveles o tratamientos se tomen equiespaciados, esto es, por ejemplo:

10, 20, 30, 40 ºC;
5, 10, 15, 20 minutos

La conclusión a la que se puede llegar en este caso es, si la variable de respuesta es diferente para cada uno de los tratamientos que se seleccionaron y de ser así el tipo de relación que existe entre el factor y la variable de respuesta (lineal, cuadrática, etc.)

c) Factor aleatorio cualitativo. En este caso los niveles o tratamientos se seleccionan al azar de entre varios posibles. Por ejemplo si se tienen varios lotes de un mismo proveedor, al azar se selecciona cuales de ellos analizar.

La conclusión que se puede obtener en este caso es si el factor en general, no sólo a los niveles que se probaron, afecta o no la característica de calidad. Observe que en este caso la conclusión del experimento se extiende para cubrir todos los posibles niveles.

d) Factor aleatorio cuantitativo. Igual que en el caso anterior, los diferentes niveles o tratamientos son seleccionados al azar. Por ejemplo, para temperatura si el rango de interés es de 0 a 100 ºC, se pueden seleccionar al azar cinco niveles; 7, 36, 46, 80, y 95 ºC. La conclusión que se obtiene en este caso es similar al caso *c*.

¿Cuál de los cuatro casos se debe usar?. El hecho de que el factor sea cualitativo o cuantitativo depende de la naturaleza del factor de interés y no del criterio del experimentador. En cuanto que los niveles sean fijos o aleatorios depende de la información deseada.

Por mucho, los más usados son los factores fijos, quizá porque el experimentador desea generalmente tener un buen control sobre los niveles y además porque en el caso de varios factores se desea manejar dos niveles solamente.

Si los niveles son fijos, los análisis son similares no importa si éste es cualitativo o cuantitativo.

3. Definir el diseño

Esto implica definir de que manera se efectuarán las pruebas y que modelo matemático describe mejor el experimento. Existen varios tipos de experimentos, y deberá seleccionarse el que mejor se ajuste a la situación particular a resolver.

4. Efectuar el experimento

Esto se realizará de acuerdo al modelo seleccionado en el paso 3. Cuidando detalladamente que todo se lleve a cabo de acuerdo a lo establecido; así como todos los aspectos de planeación y logística.

5. Análisis de los datos

Incluye básicamente el análisis estadístico y la interpretación de los resultados. El análisis se puede facilitar con el uso de softwares disponibles en el mercado.

6. Conclusiones y toma de decisiones

La experiencia, los conocimientos técnicos relativos al problema a resolver y la aplicación adecuada de los métodos estadísticos permiten obtener conclusiones que permitan tomas de decisiones acertadas. Es fundamental que cuando se tienen dudas respecto a las conclusiones y/o plan de acción se realizan experimentos confirmatorios.

1. 5 Aplicación del diseño de experimentos

En muchas ocasiones el término experimento se encuentra asociado exclusivamente con cuestiones científicas y teóricas, lejos de la práctica; sin embargo usted puede imaginar situaciones en su área de trabajo donde los pasos 1 y 2 de la metodología (Identificación del problema y de las variables) se puedan aplicar.

Algunos ejemplos son situaciones en las que queremos saber:

- Si la materia prima que es entregada por tres diferentes proveedores produce características diferentes en el producto final.
- Si diferentes marcas de herramientas tienen, o no, diferente tiempo de vida útil.
- Si la temperatura del baño maría afecta, o no, la formación de compuestos coloreados en una técnica espectrofotométrica.
- Si diferentes cabezales de una misma máquina generan productos similares.
- Si un nuevo método analítico incrementa, o no, la productividad del laboratorio.
- Cuál es el factor que más influye en la variabilidad de alguna característica de calidad.
- Si el contenido de un *analito* en una muestra afecta las características del método (exactitud, precisión, etc.), o no.

1. 6 Lista de comprobación para planear programas de pruebas

A. Obtenga un enunciado claro del problema

1. Identifique la nueva e importante área del problema.
2. Delinee el problema específico dentro de sus limitaciones usuales.
3. Defina el propósito exacto del programa de prueba.
4. Determine la relación del problema particular con la investigación total o programa de desarrollo.

B. Reúna la información básica disponible

1. Investigue todas las fuentes de información disponibles.
2. Tabule los datos pertinentes para planear un nuevo programa.

C. Diseñe el programa de prueba

1. Sostenga una conferencia con todas las partes concernientes.

a) Enuncie las proposiciones por probar.
b) Especifique respecto a la magnitud de las diferencias que usted considere.
c) Esboce las alternativas posibles de los sucesos.
d) Escoja los factores por estudiar.
e) Determine el rango práctico de estos factores y los niveles específicos a los que se harán las pruebas.
f) Escoja las mediciones finales que van a hacerse.
g) Considere el efecto de la variabilidad de muestreo y de la precisión de métodos de prueba.
h) Considere las posibles interacciones de los factores.
i) Determine las limitaciones de tiempo, costo, materiales, potencia humana, instrumentación y otros factores y de condiciones extrañas tales como condiciones metereológicas.
j) Considere los aspectos de las relaciones humanas.

2. Diseñe el programa en forma preliminar.

a) Prepare un programa sistemático completo.
b) Proporcione las etapas de ejecución o adaptación del programa cédula, si es necesario.
c) Elimine los efectos de las variables que no están en estudio, mediante control, balanceo o aleatorización de las mismas.
d) Reduzca al mínimo el número de ejecuciones del experimento.

e) Elija el método de análisis estadística.
f) Haga las indicaciones prudentes para una acumulación ordenada de datos.

3. Revise el diseño en colaboración con las partes concerniente.
a) Ajuste el programa de acuerdo con los comentarios.
b) Desglose en términos precisos los pasos a seguir.

D. Planee y lleva a cabo el trabajo experimental
1. Desarrolle métodos, materiales y equipo.
2. Aplique los métodos o técnicas.
3. Supervise y cheque los detalles; modificando los métodos si es necesario.
4. Registre cualquier modificación al diseño del programa.
5. Sea cuidadoso en la colección de datos.
6. Registre el avance del programa.

E. Analice los datos
1. Reduzca los datos registrados a forma numérica, si es necesario.
2. Aplique las técnicas adecuadas de la estadística matemática.

F. Interprete los resultados
1. Considere todos los datos observados.
2. Limite las conclusiones a deducciones estrictas a partir de la evidencia obtenida.
3. Pruebe mediante experimentos independientes, las controversias que susciten los datos.
4. Llegue a conclusiones, tanto respecto al significado técnico de resultados como respecto a su significancia estadística.
5. Específique lo que implican los resultados para su aplicación y para trabajos posteriores.
6. Tome en cuenta todas las limitaciones impuestas por los métodos usados.
7. Enuncie los resultados en términos de probabilidades verificadas.

G. Prepare el informe
1. Describa claramente el trabajo dando antecedentes, aclaraciones pertinentes del problema y del significado de los resultados.
2. Use métodos gráficos y tabulares para la presentación de los datos en forma eficiente para usos futuros.
3. Suministre información suficiente para que el lector pueda verificar resultados y sacar conclusiones propias.
4. Limite las conclusiones a un resumen objetivo, tal que el trabajo evidencie su uso para consideraciones rápidas y acciones decisivas.

En resumen, el diseño de un experimento puede requerir bastante tiempo y ocasionalmente es un proceso laborioso. Entonces, el uso de listas de verificación como las presentadas anteriormente, pueden ser útiles (como un complemento del sentido común) para asegurar que nada ha pasado desapercibido.

Diseño de un solo factor

Capítulo II

Capítulo II

Diseño de un solo factor

2.1 Introducción a los diseños unifactoriales

La idea de este capítulo es plantear la idea esencial del diseño de un solo factor y sus niveles para estudiar su efecto con una variable de respuesta, viendo a través de un problema su análisis estadístico y sus supuestos.

2.2 Diseño Unifactorial

El diseño de un solo factor con dos niveles es el diseño más simple ya que sólo se quiere probar la diferencia de dos medias. En este diseño se supone que no existen variables adicionales o covariables que estén afectando el experimento.

Ejemplo 2.1

En el desarrollo de un nuevo producto alimenticio se desea comparar el efecto del tipo de envase sobre la vida de anaquel del producto alimenticio. Para ello se quieren probar tres tipos de envases A, B, y C. Con lo que se realizan 10 replicas de cada tipo de envase y al final se mide los días de duración. Los datos obtenidos se muestran en la tabla 2.1.

		Respuesta: Días de duración	Media
Factor: Tipo de envase	A	23 28 21 27 35 41 37 30 32 36	31
	B	35 36 29 40 43 49 51 28 50 52	41.3
	C	50 43 36 34 45 52 52 43 44 34	43.3

Tabla 2.1 Días de duración de un producto alimenticio.

En el Ejemplo 2.1 podemos ver que:
Variable de respuesta: Días de duración del producto
Factor controlado: tipo de envase

Número de Niveles o de Tratamientos: 3 (por que se están probando 3 envases)
Modelo matemático o modelo estadístico de este diseño es:

$$y_{ij} = \mu + \tau_i + \varepsilon_{ij}$$

Donde y_{ij} es días de duración; μ media global o media general; τ_i efecto del factor o efecto del tipo de envase; ε_{ij} error aleatorio.

Para este diseño se tienen dos hipótesis:

Hipótesis Nula:
H_0: No influye el tipo de envase en los días de duración de un producto alimenticio.
O que es lo mismo,
$H_0: \mu_1 = \mu_2 = \mu_3$
Donde μ_1 es la media del envase A, μ_2 es la media del envase B y μ_3 es la media del envase C.

Hipótesis Alternativa:
H_a: El tipo de envase influye en la duración de un producto alimenticio.
O lo que es lo mismo,
$H_a: \mu_i \neq \mu_j$ Al menos un par de medias son diferentes para $i \neq j$.

Para determinar con cual hipótesis nos quedamos, es necesario realizar una Análisis de Varianza.

2.2 Análisis estadístico de efectos fijos de un solo factor (ANOVA)

El Análisis de Varianza (ANOVA) es una técnica estadística muy poderosa para el estudio del efecto de uno o más factores sobre la media de una variable (y la varianza de la variable). La Idea básica es descomponer la variabilidad total observada en dos partes, una la variabilidad debida a las diferencias entre tratamientos y otra la variabilidad interna en los tratamientos.

2.2.1 Estimación de la suma de cuadrados total

La Suma de Cuadrados Total mide la variabilidad total de los datos y se representa por SC_{TOTAL}, el cual se estima con la siguiente fórmula 2.1.

$$SC_{TOTAL} = \sum_{i=1}^{a} \sum_{j=1}^{n} y_{ij}^{\ 2} - \frac{y_{..}^{2}}{N} \qquad (2.1)$$

Donde N es el total de datos y $y.. = \sum_{i=1}^{a} \sum_{j=1}^{n} y_{ij}$

Considerando los datos de la tabla 2.1, calculamos el primer termino de la derecha de la fórmula 2.1, el cual representa la suma del cuadrado de cada dato.

$$\sum_{i=1}^{a}\sum_{j=1}^{n} y_{ij}^2 = (23)^2 + (28)^2 + ... + (34)^2 = 46954$$

El segundo término de la derecha de la fórmula 2.1, se estima como sigue:

$$y^2.. = \left(\sum_{i=1}^{a}\sum_{j=1}^{n} y_{ij}\right)^2 = (23 + 28 + ... + 34)^2 = 1336336$$

Este término representa la suma de todos los datos elevada al cuadrado. Este término se divide entre el total de los datos del diseño, obteniendo lo siguiente:

$$\frac{y^2..}{N} = \frac{1336336}{30} = 44544.53333 \qquad (2.2)$$

Al restar el primer término con el segundo, obtenemos la estimación de la suma de cuadrados total.

$$SC_{TOTAL} = \sum_{i=1}^{a}\sum_{j=1}^{n} y_{ij}^2 - \frac{y_{..}^2}{N} = 46954 - 44544.53333$$

$$SC_{TOTAL} = 2409.5 \qquad (2.3)$$

Grados de libertad de la suma de cuadrados totales

Los grados de libertad de la suma de cuadrados totales, se estiman restándole uno al total de los datos, es decir N-1=30-1=29.

2.2.2 Estimación de la suma de cuadrados de los tratamientos

La Suma de Cuadrados de Tratamientos mide la variabilidad en los datos asociada a la diferencia de los tratamientos, el cual se representa con $SC_{TRATAMIENTO}$ y se estima usando la fórmula 2.4.

$$SC_{TRATAMIENTO} = \sum_{i=1}^{a} \frac{y_{i.}^2}{n_i} - \frac{y_{..}^2}{N} \qquad (2.4)$$

Donde $y_{i.}^2 = \left(\sum_{j=1}^{n} y_{ij}\right)^2$, N= Total de datos, n_i= el número de replicas por tratamiento, además nótese que el segundo término de la derecha de la fórmula 2.4 es el mismo término que aparece en la fórmula 2.1.

Considerando los datos del ejemplo de la tabla 2.1, tenemos que:

$y_{1.}^2 = \left(\sum_{j=1}^{n=10} y_{1j} \right)^2 = (310)^2$, y representa la suma de los datos del envase A elevado al cuadrado.

$y_{2.}^2 = \left(\sum_{j=1}^{n=10} y_{2j} \right)^2 = (413)^2$, y representa la suma de los datos del envase B elevado al cuadrado.

$Y_{3.}^2 = \left(\sum_{j=1}^{n=10} Y_{3j} \right)^2 = (433)^2$, es la suma de los datos del envase C elevado al cuadrado.

Tomando el resultado de la expresión 2.2,

$$\frac{y^2..}{N} = \frac{1336336}{30} = 44544.53333$$

Sustituyendo los términos calculados en la fórmula 2.4, obtenemos la suma de cuadrados de los tratamientos:

$$SC_{TRATAMIENTO} = \Sigma_{i=1}^{a} \frac{y_{i.}^2}{n} - \frac{y_{..}^2}{N} = \left[\frac{(310)^2}{10} + \frac{(413)^2}{10} + \frac{(433)^2}{10} \right] - 44544.53333$$

$$SC_{TRATAMIENTO} = [9610 + 17056.9 + 18748.9] - 44544.53333$$

$SC_{TRATAMIENTO}$= 45415.8-44544.53333 = 871.3 (2.5)

Grados de libertad de la suma de cuadrados tratamientos

Los grados de libertad de la suma de cuadrados de los tratamientos se obtienen restando un uno al número de tratamientos, en este caso hay 3 envases o 3 tratamientos por lo que los grados de libertad son (a= numero de tratamientos, a-1) 3-1=2.

2.2.3 Estimación de la suma de cuadrados el error o residual

Suma de Cuadrados del Error o Residual, mide la variabilidad que no es debida a las diferencias entre tipo de envase, es la variabilidad interna en los tratamientos y simbólicamente lo representaremos por SC_{ERROR}, el cual se obtendrá con la fórmula 2.6.

$$SC_{ERROR} = SC_{TOTAL} - SC_{TRATAMIENTO} \quad (2.6)$$

Dado que tenemos lo estimado en la suma de cuadrados total (2.3) y en la suma de cuadrados de los tratamientos (2.5), encontramos que la suma de cuadrados del error es:

$$SC_{ERROR} = 2409.5 - 871.3 = 1538.2 \quad (2.7)$$

Grados de libertad de la suma de cuadrados del error

Los grados de libertad de la suma de cuadrados del error se obtienen restando el numero de tratamientos al total de datos (N-a), así tenemos 30 datos y 3 tratamientos (3 envases), los grados de libertad son: $30 - 3 = 27$.

2.2.4 Estimación de los cuadrados medios

Para estimar la tabla de Análisis De Varianza, es necesario calcular los cuadrados medios. Los cuadrados medios, como su nombre lo indican, son un promedio de la variabilidad.

2.2.5 Estimación del cuadrado medio de los tratamientos

El cuadrado medio del tratamiento es el resultado de dividir la suma de cuadrados de los tratamientos entre sus grados de libertad.

$$CM_{TRATAMIENTO} = = \frac{SC_{TRATAMIENTO}}{a-1} = \frac{871.3}{2} = 435.65 \qquad (2.8)$$

2.2.6 Estimación del cuadrado medio del error

El cuadrado medio del error es el resultado de dividir la suma de cuadrados del error entre sus grados de libertad.

$$CM_{ERROR} = \frac{SC_{ERROR}}{N-a} = \frac{1538.2}{27} = 56.97 \qquad (2.9)$$

2.2.7 Obtención del la F calculada o de la F_0

La F calculada o la F_0 es el resultado de dividir el Cuadrado Medio de los Tratamientos entre el Cuadrado Medio del Error, es decir

$$F_0 = \frac{CM_{TRATAMIENTO}}{CM_{ERROR}} = \frac{435.65}{56.97} = 7.6 \qquad (2.10)$$

2.2.8 Tabla del análisis de varianza para el diseño unificatorial

Todos los resultados anteriormente encontrados se sintetizan en una tabla llamada Tabla de *Análisis de Varianza* como se puede ver en la tabla 2.2.

Fuente de Variación	Suma de Cuadrados	Grados de Libertad	Cuadrados Medios	F-calculada Fo
Tipo de envase	871.3	2	435.63	7.647
Error	1538.2	27	56.97	
Total	2409.5	29		

Tabla 2.2 Análisis de Varianza

2.2.9 Obtención de la F de tablas F(tablas)

En las tablas de la distribución F de Fisher (Apéndice A) podemos ver que para un α con 2 grados de libertad en el numerador y 27 grados de libertad en el denominador se tiene que el valor de la F(tablas) es 3.35.

2.2.10 Comparación de la F de tablas con la F-calculada

Si el valor de la Fo es mayor que el valor de la F(tablas) entonces se rechaza la hipótesis nula, en los resultados se puede ver que Fo=7.647>F(tablas)=3.35, entonces decimos que rechazamos la hipótesis nula, con lo que se concluye que si existen diferencias en los tipos de envase. En otras palabras el tipo de envase si influye en la vida de anaquel de un producto alimenticio.

Nótese que el análisis de varianza sólo nos indica que si existen diferencias entre los envases con respecto a la duración del producto, pero no establece cual es mejor envase. Para ello se requiere hacer un análisis complementario conocido como Prueba de Rangos Múltiples. La prueba de rangos múltiples consiste en un conjunto de pruebas de comparación: Prueba de LSD, DUNCAN y TUKEY.

2.3 Pruebas de rangos multiples

2.3.1 Prueba de LSD: Prueba de la mínima diferencia significativa

Supongamos que después de haber rechazado la hipótesis nula, con base en una prueba F de análisis de varianza, se desea probar $Ho: \mu_i = \mu_j$, para toda i ≠ j, para todas las posibles parejas de medias de los tratamientos.

Suponiendo una hipótesis alterna bilateral, dos medias se consideran diferentes si

$$\left|\overline{Y}_{i.} - \overline{Y}_{j.}\right| > t_{\frac{\alpha}{2}}, (N-a)\sqrt{CM_{ERROR}\left(\frac{1}{n_i}+\frac{1}{n_j}\right)} \qquad (2.12)$$

Donde CM_{ERROR} es el cuadrado medio del error de la tabla de Análisis de Varianza, n_i y n_j son el numero de replicas del tratamiento *i* y el tratamiento *j*, respectivamente.

La expresión

$$LSD = t_{\frac{\alpha}{2}},(N-a)\sqrt{CM_{ERROR}\left(\frac{1}{n_i}+\frac{1}{n_j}\right)} \qquad (2.13)$$

Se le conoce como *Mínima Diferencia Significativa.*

Si el diseño unifactorial es balanceado, es decir $n_1 = n_2 = ... = n_a = n$, la expresión 2.13 se rescribe como:

$$LSD = t_{\frac{\alpha}{2}},(N-a)\sqrt{\frac{2CM_{ERROR}}{n}} \qquad (2.14)$$

El procedimiento de la prueba de LSD, simplemente consiste en comparar las diferencias observadas entre cada par de promedios con el valor correspondiente del LSD. Si $\left|\overline{Y_{i.}} - \overline{Y_{j.}}\right| > LSD$, se concluye que las medias poblacionales $\mu_i \; y \; \mu_j$ son estadísticamente diferentes.

Tomando los datos de la tabla 2.1, tenemos que el promedio de las replicas de cada envase son

Tipo de envase	Media
A	31
B	41.3
C	43.3

Ahora obtendremos el valor absoluto de la diferencia de cada par de comparación, como se muestra en la tabla 2.3.

Comparación	Diferencia absoluta
A con B	$\lvert 31-41.3\rvert = 10.3$
A con C	$\lvert 31-43.3\rvert = 12.3$
B con C	$\lvert 41.3-43.3\rvert = 2$

Tabla 2.3 diferencias Absolutas.

Viendo las tablas de la distribución t-student (Apéndice B), para un nivel de confianza dado=0.05 y 27 grados de libertad el valor del estadístico t es:

$$t_{\frac{a}{2}},(N-a)=t_{\frac{0.05}{2}},(30-3)=t_{0.025},(27)$$

De la tabla del Análisis de Varianza (2.2), tenemos que valor de cuadrado medio del error es:

$$CM_{ERROR}=56.97$$

Y como n=10, sustituyendo estos valores en la formula (2.14) tenemos que el valor del LSD es:

$$LSD=2.05\sqrt{\frac{2(56.97)}{10}}=6.9265$$

Comparando el valor absoluto de la diferencia de cada par de medias con el valor de LSD, tenemos la tabla 2.4,

Comparación	Diferencia absoluta	Comparación con el Valor de LSD
A con B	$\lvert 31-41.3\rvert = 10.3$	>6.92*
A con C	$\lvert 31-43.3\rvert = 12.3$	>6.92*
B con C	$\lvert 41.3-43.3\rvert = 2$	<6.92

** Existe diferencia entre las medias de los tratamientos*
Tabla 2.4 Comparaciones con LSD

Los resultados de la tabla 2.4 son más fáciles de visualizar si agrupamos los envases en grupos homogéneos (tabla 2.5). Para ello se ordenan los tratamientos (ascendente o descendente) y se agrupan conforme a los resultados del LSD, donde los envases que pertenecen a un mismo grupo significa que no hay diferencias estadísticas en sus promedios.

Envase	Casos	Media	Grupos Homogéneos
A	10	31.00	X
B	10	41.30	X
C	10	43.33	X

Tabla 2.5 Formación de grupos homogéneos.

De acuerdo a los resultados anteriores podemos concluir que el envase A es sólo un grupo homogéneo, y que los envases B y C forman el mismo grupo. Como se busca que el producto dure más días se recomienda ya sea el envase B o C, ya que presenta mayor promedio que el envase A.

2.3.2 Prueba de intervalos múltiples de Duncan

Otro procedimiento ampliamente usado para comparar todas las parejas de medias, es la prueba de intervalos múltiples desarrollada por Duncan (1955). Para aplicar dicha prueba en tratamientos con el mismo número de replicas, se ordenan ascendentemente los a promedios de tratamientos y se estima el error estándar del promedio de cada tratamiento, usando:

$$S_{\bar{y}_{i.}} = \sqrt{\frac{CM_{ERROR}}{n}} \qquad (2.15)$$

Para tratamientos con un número diferente de replicas, n se estima con la media armónica n_k

$$n_k = \frac{a}{\sum_{i=1}^{a} \frac{1}{n_i}} \qquad (2.16)$$

Nótese que $n_k = n$ si $n_1 = n_2 = \ldots n_a$. A partir de la tabla de Intervalos significativos de Duncan (ver tabla en el apéndice A.3) se obtienen los valores $r_\alpha(p, f)S_{\bar{y}_{i.}}$, para $p=2,3,...,a$, en donde es el nivel de significancia y f es el número de grados de libertad del error. Estos intervalos deben transformarse en un conjunto $a-1$ mínimos intervalos significativos (es decir, R_p) para $p=2,3,...,a$, calculando:

$$R_p = r_\alpha(p, f)S_{\bar{y}i.} \qquad (2.17)$$

En seguida, se prueban las diferencias observadas entre las medias, comenzando por el valor más alto contra el más pequeño, comparando esta diferencia con el intervalo mínimo significativo. R_a Después se calcula la diferencia entre el valor más alto y el segundo más pequeño y se compara con el intervalo mínimo significativo R_{a-1}. Este procedimiento continúa hasta que todas las medias han sido comparadas con la media más grande. Posteriormente, la diferencia entre la segunda media más grande y la más pequeña se calcula y se compara con el intervalo mínimo significativo R_{a-1}. Este proceso continúa hasta que han sido consideradas las diferencias entre las $a(a-1)/2$ posibles pares. Si una diferencia observada es mayor que el intervalo mínimo significativo correspondiente, se concluye que la pareja de medias en cuestión son significativamente diferentes. Para evitar contradicciones, ninguna diferencia entre una pareja de medias se considera significativa si las dos medias se encuentran entre otras dos que no difieren significativamente.

A continuación, se aplica la prueba de intervalos múltiples de Duncan a los datos del ejemplo de la tabla 2.1. Recordemos que el CM_{ERROR} =56.97, N=30, n=10, a=3, y que el error tiene 27 grados de libertad. Organizando las medias de los tratamientos en orden ascendente se tiene:

Tipo de envase	Media
C	43.3
B	41.3
A	31.0

El error estándar de cada promedio es

$$S\bar{y}_i = \sqrt{\frac{CM_{ERROR}}{n}} = \sqrt{\frac{56.97}{10}} = 2.38 \qquad (2.18)$$

Usando la tabla de intervalos mínimos significativos del Apéndice C, para 27 grados de libertad y , los intervalos significativos son:

$r_\alpha(p, f)$

$r_{0.05}(2, 27) = 2.89$

$r_{0.05}(3, 27) = 3.04$

Así, los rangos mínimos significativos son:

$R_p = r_\alpha(p, f) S\bar{y}_{i.}$

$R_2 = r_{0.05}(2, 27) 2.38 = (2.89)(2.38) = 6.87$

$R_3 = r_{0.05}(3, 27) 2.38 = (3.04)(2.38) = 7.23$

Se hacen las comparaciones del promedio mayor al promedio menor, con lo que obtenemos:

La media de C contra la media de A: 43.3 − 31.0 = 12.3 > 7.23 (R_3)

La media de C *vs* la media de B: 43.3 − 41.3 = 2 < 6.87 (R_2)

La media de B *vs* la media de A: 41.3 − 31 = 10.3 > 6.87 (R_2)

A partir de este análisis se observa que existen diferencias significativas entre las parejas de medias del envase C con A y B con A. No existen diferencias significativas con las medias de B y C.

2.3.3 Prueba de Tukey

Su procedimiento requiere del uso $q_\alpha(a, f)$, que es conocido como el punto porcentual superior de tamaño α del intervalo *studentizado* para el número de niveles *a* y *f* grados de libertad del error, para determinar el valor crítico de todas las comparaciones por pares. La prueba de *tukey* declara dos medias significativamente diferentes si el valor absoluto de sus diferencias promedio excede a:

$$T_\alpha = q_\alpha(a, f) S\bar{y}_{i.} \qquad (2.19)$$

Donde $q_\alpha(a, f)$ son valores que se encuentran en el apéndice D y $S\bar{y}_{i.} = \sqrt{\frac{CM_{ERROR}}{n}}$

Continuando con los datos 2.1 del ejemplo de los envases, tenemos que:

Tipo de envase	Media
C	43.3
B	41.3
A	31.0

El valor de $T_{0.05} = q_{0.05}(3, 27)(2.38) = (3.48)(2.38) = 8.28$

Las diferencias de cada par de medias distintas son:

Comparación	Diferencia absoluta
A con B	$\|31 - 41.3\| = 10.3$
A con C	$\|31 - 43.3\| = 12.3$
B con C	$\|41.3 - 43.3\| = 2$

Tabla 2.5 Diferencias de promedios en los tratamientos

Comparando estos resultados con el valor de Tukey, tenemos la tabla 2.6:

Comparación	Diferencia absoluta	Comparación con el Valor de LSD
A con B	$\|31 - 41.3\| = 10.3$	>8.28*
A con C	$\|31 - 43.3\| = 12.3$	>8.28*
B con C	$\|41.3 - 43.3\| = 2$	<8.28

Tabla 2.6 Comparación de medias con el valor de Tukey

A partir de este análisis se observa que existen diferencias significativas entre las parejas de medias del envase C con A y B con A. No existen diferencias significativas con las medias de B y C. Conclusión: para maximizar el tiempo de duración de un producto se puede usar tanto el envase B o el envase C.

2.4 Supuestos del modelo unifactorial

Algo fundamental en el análisis de varianza son los supuestos de los residuales, los cuales deben cumplir con tres:

1.- Los residuales deben ser independientes
2.- Los residuales deben tener varianza constante
3.- Los residuales se distribuyen normal.

Si alguno de esos tres no se cumple es suficiente para invalidar el Análisis de Varianza. Para checar estos tres supuestos se deben calcular primeramente los residuales mediante la siguiente fórmula:

$$e_{ij} = y_{ij} - \overline{y}_{i.} \qquad (2.20)$$

Donde $\overline{y_{i.}} = y_{i.} / n$ es el promedio del i-ésimo tratamiento. Los residuales del tipo de envase, se pueden ver en la tabla 2.7.

Envase A	Envase B	Envase C
23-31=-8	35-41.3=-6.3	50-43.3=6.7
28-31=-3	36-41.3=-5.3	43-43.3=-0.3
21-31=-10	29-41.3=-12.3	36-43.3=-7.3
27-31=-4	40-41.3=-1.3	34-43.3=-9.3
35-31=4	43-41.3=1.7	45-43.3=1.7
41-31=10	49-41.3=7.7	52-43.3=8.7
37-31=6	51-41.3=9.7	52-43.3=8.7
30-31=-1	28-41.3=-13.3	43-43.3=-0.3
32-31=1	50-41.3=8.7	44-43.3=0.7
36-31=5	52-41.3=10.7	34-43.3=-9.3

Tabla 2.7 residuales de los tratamientos de los datos 2.1

2.4.1 Supuesto de varianza constante

El supuesto de varianza constante se puede checar en una gráfica de X-Y, en el que los tratamientos se especifican en el eje X y el residual en el eje Y. Esta gráfica recibe el nombre: *gráfica de residuales vs los niveles del factor*, y se puede ver en la figura 2.1.

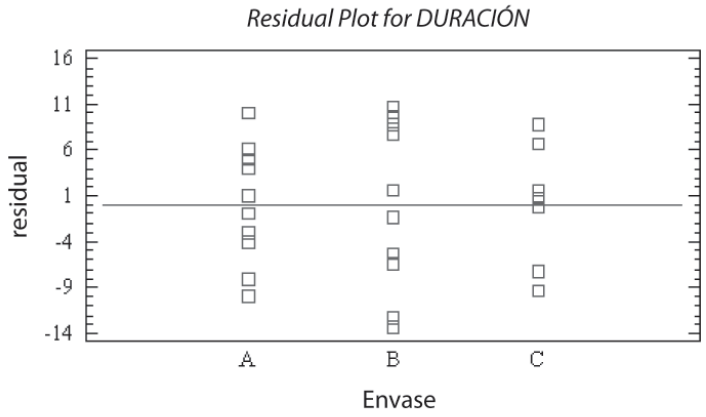


Figura 2.1 gráfica de residuales vs los niveles del factor.

En esta gráfica no debe presentarse ningún tipo patrón de comportamiento. La variación de los puntos tanto del los niveles A, B y C no deben presentar diferencias. No se debe distinguir la presencia de un embudo. En este caso no se presenta patrón inusual por lo que podemos concluir que sí se cumple el supuesto de varianza constante.

2.4.2 Supuesto de independencia

Para checar el supuesto de independencia se requiere tener el orden de corrida experimental, es decir el orden en que se corrió cada prueba experimental, como se ilustra en la tabla 2.8.

Orden de Corrida	Envase	Residual
1	A	-8
2	B	-6.3
3	C	6.7
4	A	-3
5	B	-12.3
6	B	-1.3
7	C	-0.3
8	A	-10
9	C	-7.3
10	B	1.7
11	B	7.7
12	A	-4
13	C	-9.3
14	A	4
15	B	9.7

16	C	1.7
17	C	8.7
18	A	10
19	C	8.7
20	B	-13.3
21	A	6
22	C	-0.3
23	B	8.7
24	A	-1
25	C	0.7
26	B	10.7
27	A	1
28	C	-9.3
29	B	-5.3
30	A	5

Tabla 2.8 Orden de corrida experimental

Se construye una gráfica X-Y, donde en el eje X se especifica el orden en de la prueba experimental que se corrió y en el eje Y se grafica el correspondiente residual de esa prueba, en la Figura 2.2 se muestra la tendencias de los residuales. En esta gráfica no se encuentra ningún patrón o tendencia lineal, en seguida son graficados como se muestra a continuación:

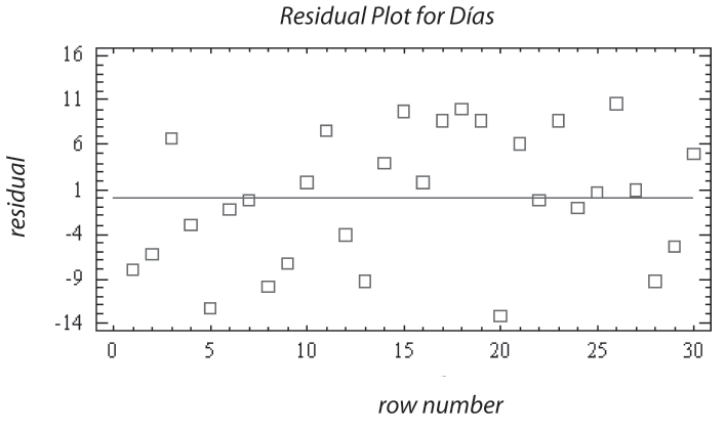


Figura 2.2 Residuales vs Orden de corrida

En esta figura se presenta gráficamente el número de corrida contra el valor del residual. En esta gráfica no se debe presentar ningún tipo de patrón de comportamiento, los puntos deben verse completamente dispersos. De acuerdo a esta gráfica se puede concluir que si se cumple el supuesto de independencia.

2.4.3 Supuesto de normalidad

Un procedimiento útil consiste en construir una gráfica de probabilidad normal de los residuos. Una gráfica de este tipo es la representación de la distribución acumulada de los residuos sobre papel de probabilidad normal, en otras palabras, es papel para gráficas cuya escala de ordenadas es tal que la distribución normal acumulada sea una recta. Para construir una gráfica de probabilidad normal se hace el siguiente procedimiento:

1. Se ordenan los residuos en orden ascendente:

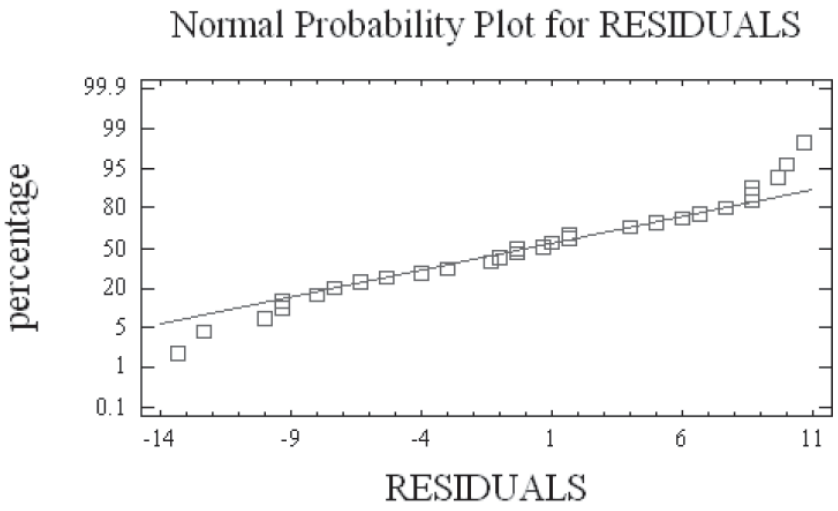
Residuales ordenados		
-13.3	-1.3	6.7
-12.3	-1	7.3
-10	-0.3	7.7
-9.3	0.3	8.7
-8	0.7	8.7
-6.3	1.7	8.7
-5.3	1.7	9.3
-4	4	9.7
-4	5	10
-3	6	10.7

2. A cada residuo se le calcula su punto de probabilidad acumulada mediante la siguiente formula:

$$P_k = \frac{(k-0.5)}{N}$$

k	e_{ij}	$P_k = \frac{(k-0.5)}{30}$	k	e_{ij}	$P_k = \frac{(k-0.5)}{30}$	k	e_{ij}	$P_k = \frac{(k-0.5)}{30}$
1	-13.3	0.016	11	-1.3	0.35	21	6.7	0.683
2	-12.3	0.05	12	-1	0.383	22	7.3	0.716
3	-10	0.083	13	-0.3	0.416	23	7.7	0.75
4	-9.3	0.116	14	0.3	0.45	24	8.7	0.783
5	-8	0.15	15	0.7	0.483	25	8.7	0.816
6	-6.3	0.183	16	1.7	0.516	26	8.7	0.85
7	-5.3	0.21	17	1.7	0.55	27	9.3	0.883
8	-4	0.25	18	4	0.583	28	9.7	0.916
9	-4	0.283	19	5	0.616	29	10	0.95
10	-3	0.316	20	6	0.65	30	10.7	0.983

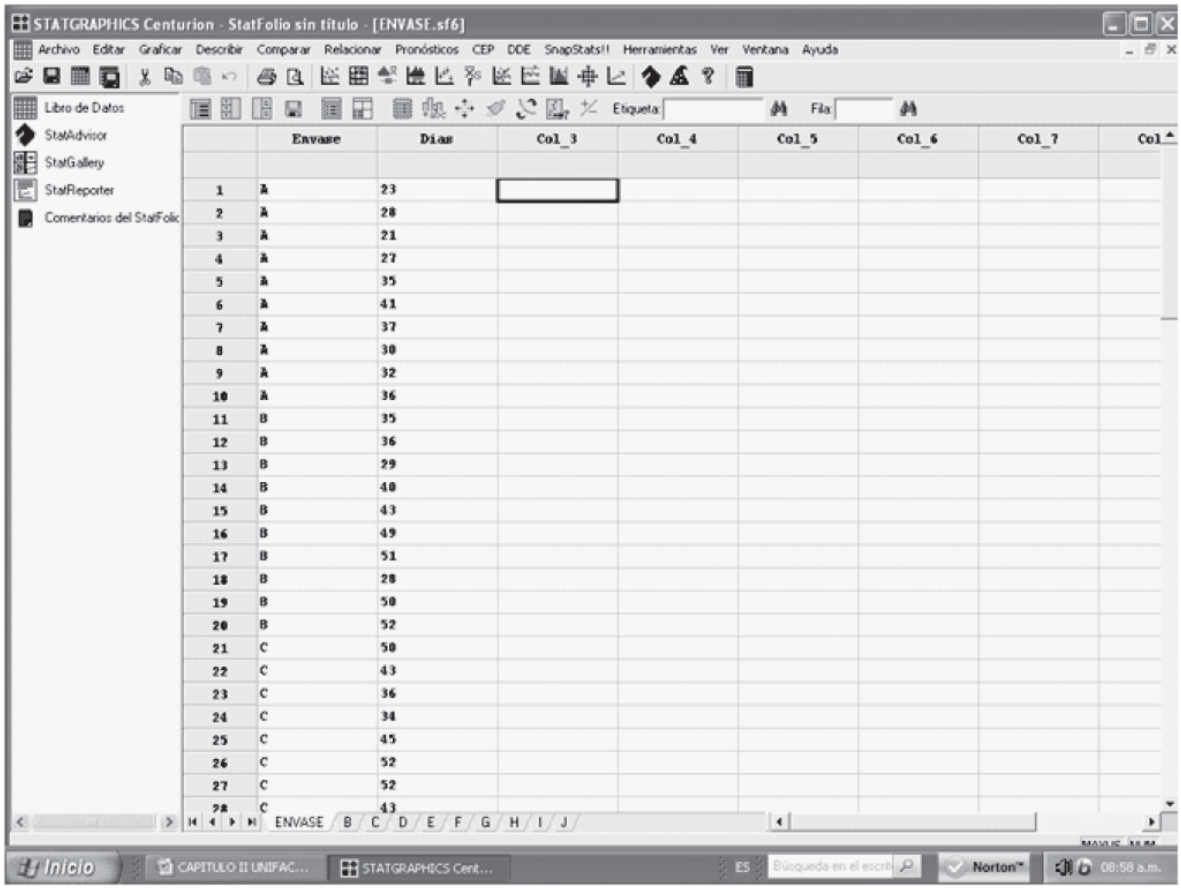
3. Se grafican e_{ij} en el eje de las X's y los $P_k = \frac{(k-0.5)}{30}$ en el eje de las Y's, como se muestra a continuación:



En está gráfica se puede ver que la mayoría de los puntos se ajustan a la línea recta, lo que significa que los residuales si cumplen el supuesto de normalidad.

2.5 Captura de datos y salida de resultados del ejemplo 2.1 usando el *statgraphics centurion XV*

2.5.1 Captura de datos del ejemplo 2.1



2.5.2 Análisis de Varianza

Tabla ANOVA para Días por envase

Fuente	Suma de Cuadrados	Gl	Cuadrado Medio	Razón-F	Valor-P
Entre grupos	871.267	2	435.633	7.65	0.0023
Intra grupos	1538.2	27	56.9704		
Total (Corr.)	2409.47	29			

2.5.3 Prueba de LSD

Pruebas de Múltiple Rangos para Días por envase

Método: 95.0 porcentaje LSD

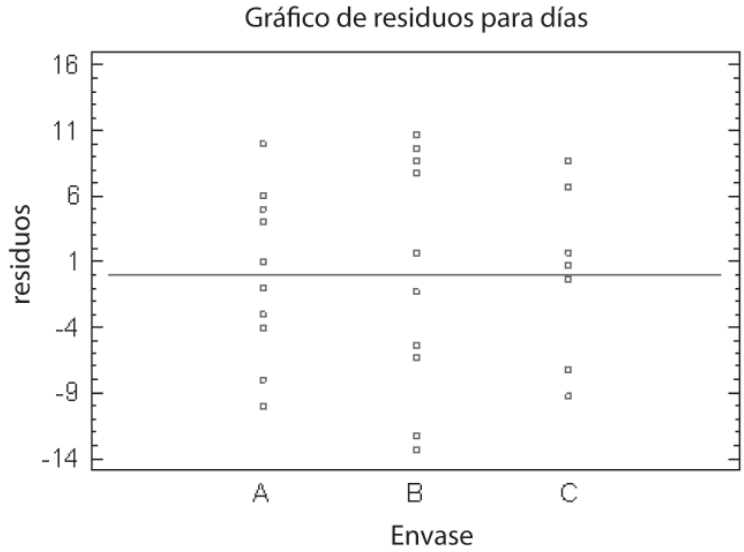
Envase	Casos	Media	Grupos Homogéneos
A	10	31.0	X
B	10	41.3	X
C	10	43.3	X

Contraste	Sig.	Diferencia	+/- Límites
A - B	*	-10.3	6.92599
A - C	*	-12.3	6.92599
B - C		-2.0	6.92599

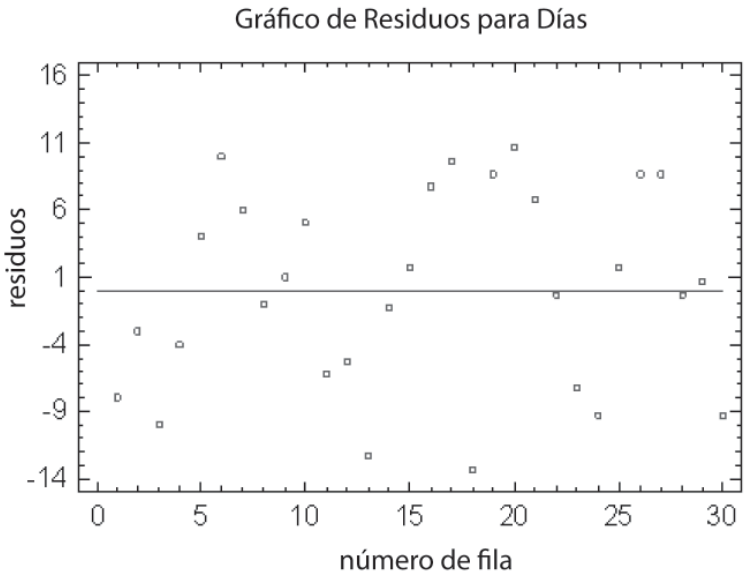
* indica una diferencia significativa.

2.5.4 Chequeo de Supuestos

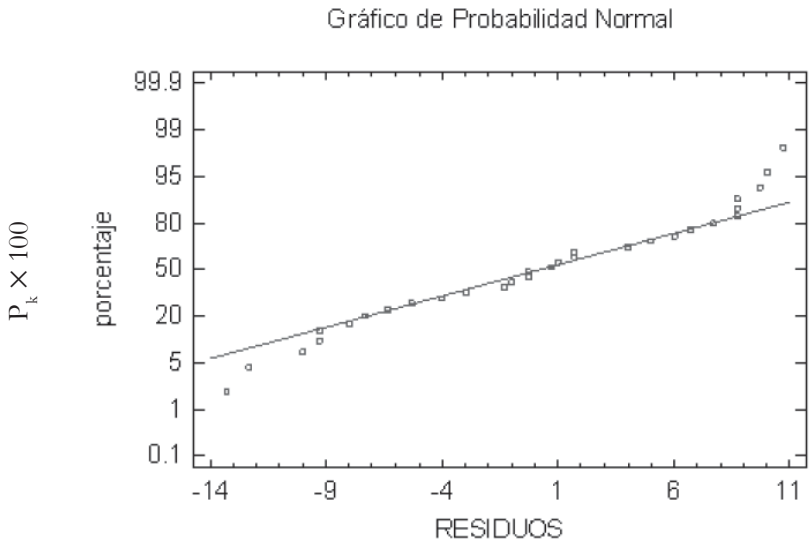
2.5.4.1 Varianza constante en los residuos



2.5.4.2 Independencia



2.5.4.3 Normalidad



2.6 Ejercicios

Práctica 2.6.1. Se está estudiando la resistencia a la tensión de cemento Portland. Cuatro técnicas de mezclado pueden ser usadas económicamente. Se han recolectado los siguientes datos:

Técnica de mezclado	Resistencia a la tensión (lb/plg^2)			
1	3129	3000	2865	2890
2	3200	3300	2975	3150
3	2800	2900	2985	3050
4	2600	2700	2600	2765

(a) Formule las hipótesis pertinentes al problema
(b) ¿Hay algún problema si primero se hacen las cuatro repeticiones para la técnica 1, luego las de la 2, y así sucesivamente?
(c) Realice el análisis estadístico para probar la hipótesis que se formuló en (a). Obtenga conclusiones. Use $\alpha = 0.05$
(d) Realice la prueba de LSD y concluya cual técnica proporciona mayor resistencia.

Práctica 2.6.2. El tiempo de respuesta en milisegundos fue determinado para tres tipos de circuitos de un mecanismo de interrupción automática de válvulas. Los resultados fueron:

Tipo de circuito	Tiempo de respuesta				
1	9	12	10	8	15
2	20	21	23	17	30
3	6	5	8	16	7

(a) El tiempo medio de respuesta observado con cada circuito es 10.8, 22.2 y 8.4; para el circuito 1, 2 y 3, respectivamente. Con base en esto se puede afirmar con seguridad que el circuito 2 induce un tiempo de respuesta mayor y el 3 menor que todos? Explique
(b) Pruebe la hipótesis de que los tres circuitos tienen el mismo tiempo de respuesta. Use $\alpha = 0.01$.
(c) Aplique la prueba de *Tukey* para comparar las parejas de medias de los tratamientos.
(d) Si usted fuera el ingeniero de diseño y deseara minimizar el tiempo de respuesta. ¿Cuál tipo de circuito elegiría?.
(e) Verifique si se cumplen los supuestos
(f) Si para simplificar el trabajo experimental, primero se probó el circuito 1, luego el 2, y al final el tres. ¿De qué manera esto puede afectar las conclusiones que obtuvo antes?

Práctica 2.6.3. Un fabricante de equipos de televisión esta interesado en el efecto que tienen sobre los cinescopios de televisores a color, cuatro tipos de recubrimiento. Se obtuvieron los siguientes datos de conductividad.

Tipo de recubrimiento	Conductividad			
1	143	141	150	146
2	152	149	137	143
3	134	136	132	127
4	129	127	132	129

(a) ¿cuál es la variable de respuesta y cuál es el factor controlado?
(b) ¿existe diferencia en la conductividad producida por los recubrimientos? Use α=0.01
(c) Compare los valores medios de cada recubrimiento usando alguna prueba de LSD.
(d) Suponiendo que actualmente se usa el recubrimiento 2, ¿qué recomendaría al fabricante? Se desea minimizar la conductividad.
(e) Verifique los supuestos

Práctica 2.6.4. Están considerándose seis diferentes máquinas para sus uso en la manufactura de sellos de goma. Éstas están siendo comparadas con respecto a la resistencia de tensión del producto. Se utiliza una muestra aleatoria de 4 sellos de cada máquina para determinar si la resistencia promedio a la tensión varía de máquina a máquina, o no. Las siguientes son las mediciones de resistencia a la tensión.

Máquina	Resistencia a la tensión			
1	17.5	16.9	15.8	18.6
2	16.4	19.2	17.7	15.4
3	20.3	15.7	17.8	18.9
4	14.6	16.7	20.8	18.9
5	17.5	19.2	16.5	20.5
6	18.3	16.2	17.5	20.1

(a) ¿cuál es la variable de respuesta y cuál es el factor controlado?
(b) ¿existe diferencia en la resistencia promedio a la tensión producida por las máquinas? Use α =0.05
(c) realice los análisis complementarios necesarios
(d) ¿Qué recomendaría al fabricante ? Se desea maximizar la resistencia.
(e) verifique los supuestos

Práctica 2.6.5. Una compañía farmacéutica desea evaluar el efecto que tiene la cantidad de almidón en la dureza de las tabletas. Se decidió producir lotes con una cantidad determinada de almidón. Se decidió que las cantidades de almidón a aprobar fueran 2% , 5% y 10%. La variable de respuesta sería el promedio de la dureza de 20 tabletas de cada lote. Obteniéndose los siguientes resultados:

Porcentaje de almidon	Dureza			
2%	4.3	5.2	4.8	4.5
5%	6.5	7.3	6.9	6.1
10%	9	7.8	8.5	8.1

(a)¿cuál es la variable de respuesta y cuál es el factor controlado?
(b)¿existe diferencia en el promedio de dureza en las tabletas? Use $\alpha = 0.05$
(c) realice los análisis complementarios necesarios
(d)¿qué recomendaría al fabricante ? Se desea maximizar la dureza de las tabletas.
(e) verifique los supuestos

Práctica 2.6.6. Un fabricante supone que existe diferencia en el contenido de calcio en lotes de materia prima que le son suministrados por su proveedor. Actualmente hay una gran cantidad de lotes en la bodega. Cinco de éstos son elegidos aleatoriamente. Un químico realiza cinco pruebas sobre cada lote y obtiene los siguientes datos:

Lote 1	Lote 2	Lote 3	Lote 4	Lote 5
23.46	23.59	23.51	23.28	23.29
23.48	23.46	23.64	23.40	23.46
23.56	23.42	23.46	23.37	23.37
23.39	23.49	23.52	23.46	23.32
23.40	23.50	23.49	23.39	23.38

(a) ¿Existen diferencias significativas en el contenido de calcio de un lote a otro? Use $\alpha = 0.05$
(b) Si hay diferencias significativas en el contenido de calcio, realiza la prueba de LSD para ver cuales lotes son diferentes.
(c) Para que la conclusión anterior sea confiable se debió aplicar los tres principios de diseño experimental: repetición y aleatorización. ¿Cuántas repeticiones hay? ¿Señale el orden específico en el que usted hubiese determinado el contenido de calcio?

Práctica 2.6.7. Se están estudiando tres marcas de pilas o batería. Se sospecha que la duración (en semanas) de las tres marcas es diferente. Se prueban cinco baterías de cada marca y los resultados que se obtienen son los siguientes:

Semanas de duración

Marca 1	Marca 2	Marca 3
100	76	108
96	80	100
92	75	96
96	84	98
92	82	100

(a) ¿Hay diferencia en la duración de las tres baterías? Use $\alpha = 0.05$
(b) ¿Cuál pila usaría usted?
(c) ¿Qué se debió aleatorizar en este problema para que las conclusiones sean confiables?
(d) ¿Entre qué valores está la duración media de la pila 2?
(e) Hubiese sido suficiente probar sólo una pila de cada marca, y con base a eso decidir. Argumente.

Práctica 2.6.8. En una forja se utilizan varios hornos para calentar muestras de metal. Se supone que todos los hornos operan a la misma temperatura, aunque se sospecha que quizás esto probablemente no es cierto. Se seleccionan aleatoriamente tres hornos y se anotan sus temperaturas en tres calentamientos sucesivos. Los datos se muestran a continuación.

Horno	Temperatura				
1	491.50	498.30	498.10	493.50	493.60
2	488.50	484.65	479.90	477.35	482.34
3	490.10	484.80	488.25	473.00	471.85

(a) ¿Existe diferencia significativa en la temperatura de los hornos? Formule hipótesis, y realice el análisis estadístico apropiado. Use $\alpha=0.05$.

Práctica 2.6.9. Se pide a cuatro químicos que determinen el porcentaje de alcohol metílico en un compuesto químico. Cada uno realiza 3 determinaciones y los resultados son los siguientes:

Químico	Porcentaje de alcohol metílico.		
1	84.99	84.04	84.38
2	85.15	85.13	84.88
3	84.72	84.48	85.16
4	84.20	84.10	84.55

(a) ¿Difieren significativamente los resultados obtenidos por los químicos? Use $\alpha=0.10$.
(b) Si el químico dos es un nuevo empleado, se puede afirmar que sus mediciones difieren de las de los otros técnicos?

Práctica 2.6.10. Los datos que se presentan en seguida son rendimientos en toneladas por hectárea de un pasto con 3 niveles de fertilización nitrogenada. El diseño fue completamente aleatorizado, con 5 repeticiones por tratamiento.

Niveles de Nitrógeno		
N1	N2	N3
14.823	25.151	32.605
14.676	25.401	32.460
14.720	25.131	32.256
14.514	25.031	32.669
15.065	25.267	32.111

a) ¿cuál es el factor y cuál es la variable de respuesta?
b) obtenga el análisis de varianza e interprételo. Use α=0.05.
c) ¿qué nivel de nitrógeno da mayor rendimiento?
d) analice los residuos ¿hay algún problema?

Práctica 2.6.11. Se están investigando cuatro catalizadores que pueden afectar la concentración de un componente en una mezcla líquida formada por tres componentes. Se obtuvieron las siguientes concentraciones:

Catalizador

1	2	3	4
58.2	56.3	50.1	52.9
57.2	54.5	54.2	49.9
58.4	57.0	55.4	50.0
55.8	55.3	55.2	51.7

(a) ¿Tienen el mismo efecto en la concentración los cuatro catalizadores? Use α =0.05.
(b) ¿Cuáles catalizadores difieren entre sí?

Práctica 2.6.12. Un químico del departamento de desarrollo de un laboratorio farmacéutico desea conocer como influye el tipo de aglutinante utilizado en tabletas de ampicilina de 500 mg. en el porcentaje de friabilidad; para la cual se eligen los siguientes aglutinantes:

- Polívinilpirrolidona (PVP)
- Carboximetilcelulosa sódica (CMC)
- Grenetina

Los resultados del diseño experimental son los siguientes:

AGLUTINANTE	% DE FRIABILIDAD				
PVP	0.485	0.250	0.073	0.205	0.161
GRENETINA	9.64	19.37	19.53	9.86	9.79
CMC	0.289	0.275	0.612	0.152	0.137

1. Especifica el nombre del diseño experimental
2. Especifica el nombre de la variable de respuesta
3. Especifica el factor controlado y sus niveles

4. Escribe las hipótesis a probar
5. Realiza el análisis adecuado para probar las hipótesis e interpreta los resultados. Use α =0.05.
6. Realiza la prueba complementaria (si es necesario) para encontrar el mejor agente aglutinante, considerando que se quiere menor porcentaje de friabilidad.
7. Checa los supuestos ¿hay algún problema?

Práctica 2.6.13. Los datos de la siguiente tabla representan el número de horas de alivio que proporcionan 5 marcas diferentes de tabletas contra el dolor de cabeza que se administran a 25 sujetos que sufren fiebres de 38ºc o más.

Marcas	Numero de horas de alivio				
A	5.2	4.7	8.1	6.2	3.0
B	9.1	7.1	8.2	6.0	9.1
C	3.2	5.8	2.2	3.1	7.2
D	2.4	3.4	4.1	1.0	4.0
E	7.1	6.6	9.3	4.2	7.6

1. Especifica el nombre del diseño experimental
2. Especifica el nombre de la variable de respuesta
3. Especifica el factor controlado y sus niveles
4. Escribe las hipótesis a probar
5. Realiza el análisis adecuado para probar las hipótesis e interpreta los resultados. Use α = 0.05.
6. Realiza la prueba complementaria (si es necesario) para encontrar la marca de tableta, considerando que se quiere menor tiempo de alivio.
7. Checa los supuestos ¿hay algún problema?

Práctica 2.6.14. Se desea evaluar tres tiempos para inocular naranjas a través de inmersión durante 1, 5, y 10 minutos, en una suspensión bacteriana con una concentración de 10^8 cél/ml. El propósito es seleccionar el tiempo en el cual se adhieren más bacterias a la superficie de naranjas. Las pruebas se realizan para Escherichia coli O157:H7, midiendo como variable de respuesta el número de unidades formadoras de colonias (ufc) expresadas en logaritmos, que se recuperan en 30 cm^2 de la superficie de las naranjas inoculadas. Los datos obtenidos se muestran a continuación:

Tiempo de inmersión (min)	Log ufc de Escherichia coli O157:H7/30 cm^2					
1	5.4	4.9	5.5	5.0	4.1	5.5
5	4.9	5.2	4.2	5.0	4.9	4.7
10	3.8	5.6	4.1	5.4	3.6	5.3

1. Especifica el nombre del diseño experimental
2. Especifica el nombre de la variable de respuesta
3. Especifica el factor controlado y sus niveles
4. Escribe las hipótesis a probar

5. Realiza el análisis adecuado para probar las hipótesis e interpreta los resultados. Use α=0.05.
6. Realiza la prueba complementaria (si es necesario) para encontrar el mejor método analítico, considerando que se quiere el más cercano al 100% de recuperación.
7. Checa los supuestos ¿hay algún problema?

Práctica 2.6.15. Se desea evaluar tres tiempos para inocular naranjas a través de inmersión durante 1, 5, y 10 minutos, en una suspensión bacteriana con una concentración de 10^8cél/ml. El propósito es seleccionar el tiempo en el cual se adhieren más bacterias a la superficie de naranjas. Las pruebas se realizan para Salmonella typhimirium midiendo como variable de respuesta el número de unidades formadoras de colonias (ufc) expresadas en logaritmos, que se recuperan en 30 cm^2 de la superficie de las naranjas inoculadas. Los datos obtenidos se muestran a continuación:

Tiempo de inmersión (min)	Log ufc de Salmonella typhimurium/30cm^2					
1	4.6	4.0	5.0	4.3	3.6	5.1
5	4.1	4.7	3.3	3.8	4.3	3.6
10	2.5	4.9	2.8	4.4	2.8	3.9

1. Especifica el nombre del diseño experimental
8. Especifica el nombre de la variable de respuesta
9. Especifica el factor controlado y sus niveles
10. Escribe las hipótesis a probar
11. Realiza el análisis adecuado para probar las hipótesis e interpreta los resultados. Use α=0.05.
12. Realiza la prueba complementaria (si es necesario) para encontrar el mejor método analítico, considerando que se quiere el más cercano al 100% de recuperación.
13. Checa los supuestos ¿hay algún problema?

Práctica 2.6.16. Se estudia la duración efectiva de líquidos aislantes a una carga acelerada de 35 kV. Se han obtenido datos de prueba para cuatro tipos de líquido. Los resultados son como sigue:

Tipo de líquido	duración en horas a 35 kV de carga					
1	16.6	17.9	16.3	16.4	19.1	20.6
2	16.9	15.3	18.6	17.1	19.5	20.3
3	21.4	23.6	19.4	18.5	20.5	22.3
4	19.3	21.1	16.9	17.5	18.3	19.8

1.- Especifica la variable de repuesta
2.- Cuál es el factor controlado
3.- Escribe las hipótesis a probar
4.- Escribe el modelo matemático
5.- Realiza el análisis correspondiente. Use α=0.05.
6.- Analiza los supuestos

Práctica 2.6.17. En el siguiente experimento se compararon los tiempos de coagulación de la sangre de 4 grupos de ardillas con diferentes niveles de protrombina (un componente del plasma, necesario para la formación de coágulos).

Tiempos de coagulación (en segundos)			
Niveles de protrombina			
20%	30%	50%	100%
34.4	25.0	20.9	19.7
27.3	23.2	22.2	21.7
65.0	45.2	27.8	21.1
31.3	26.4	19.6	18.5
48.5	26.8	20.1	16.0
38.4	32.7	22.1	
40.5	28.8	19.7	

a) ¿Cuál es el factor y cuál es la variable de respuesta?
b) Obtenga el análisis de varianza e interprételo. Use α=0.05
c) Si el 100% es la sangre normal ¿qué nivel de protrombina se asemeja?
d) Analice los residuos ¿hay algún problema?

Diseño en bloques aleatorizados

Capítulo III

Capítulo III

Diseño en bloques aleatorizados

3.1 Introducción

En muchos experimentos además de que interesa investigar la influencia de un factor controlado sobre la variable de respuesta, como en la sección anterior, existe una fuente de variación conocida adicional (bloque), que puede y debe ser sistematizada y controlada durante el experimento, con el propósito de disminuir el error experimental y obtener mejores conclusiones sobre el factor controlado.

Ejemplo 3.1

Se diseñó un experimento para estudiar el rendimiento de cuatro detergentes. Las siguientes lecturas de "blancura" se obtuvieron con un equipo especial diseñado para 12 cargas de lavado distribuídas en tres modelos de lavadoras. Los datos de blancura se pueden ver en la siguiente tabla:

Detergente	Lavadora 1	Lavadora 2	Lavadora 3	Suma	Media
A	45	43	51	**139**	46.33
B	47	44	52	**143**	47.67
C	50	49	57	**156**	52
D	42	37	49	**128**	42.67
Suma	**184**	**173**	**209**	**566**	
Media	46	43.25	52.25		47.17

Tabla 3.1 Datos de blancura

Es claro que lo que interesa es investigar si hay efecto de los cuatro detergentes en la blancura de la ropa. Y si hay efecto ¿cuál detergente es el mejor? Además podemos percibir que modelo de lavadora puede influir en el experimento, ya que las lavadoras son modelos diferentes. La diferencias de lavadoras pueden producir otro efecto adicional de variabilidad, por lo que es necesario controlarla durante el experimento. Para esto se hace un diseño por bloques aleatorizados.

Del ejemplo 3.1, identificamos que la variable de respuesta es la Blancura, el factor controlado es el tipo de detergente y el bloque es el tipo de lavadora. El modelo matemático es:

$$y_{ij} = \mu + \tau_i + \beta_j + \varepsilon_{ij} \quad i = 1, 2 \ldots .a, \quad j = 1,2 \ldots .b$$ (a = número de tratamientos, b = número de bloques).

Donde y_{ij} es blancura; μ media global o media general; τ_i efecto del factor o efecto del tipo de detergente; β_j efecto del bloque o efecto de la lavadora; ε_{ij} error aleatorio.

Las Hipótesis a probar son:

Ho: no hay efecto del tipo de detergente en la blancura de la ropa
Ha: si hay efecto del tipo de detergente en la blancura de la ropa

3.2 Análisis estadístico del diseño por bloques aleatorizados (ANOVA)

El Análisis de Varianza (ANOVA) en el diseño por bloques aleatorizados consiste en descomponer la variabilidad total en tres partes: 1) la variabilidad debido a las diferencias de los tratamientos, 2) la variabilidad debida al efecto del bloque, 3) la variabilidad debida al error aleatorio.

3.2.1 Estimación de la suma de cuadrados total

La Suma de Cuadrados Total mide la variabilidad total de los datos y se representa por SC_{TOTAL}, el cual se estima con la siguiente fórmula 3.1.

$$SC_{TOTAL} = \sum_{i=1}^{a} \sum_{j=1}^{b} y_{ij}^2 - \frac{y_{..}^2}{ab} \qquad (3.1)$$

Donde a es el número de tratamientos, b es el número de bloques y $y_{..} = \Sigma_{i=1}^{a} \Sigma_{j=1}^{b} y_{ij}$

Considerando los datos de la tabla 3.1, se calcula el primer término de la derecha de la fórmula 3.1, el cual representa la suma del cuadrado de cada dato.

$$\sum_{i=1}^{a} \sum_{j=1}^{b} y_{ij}^2 = (45)^2 + (43)^2 + (51)^2 \ldots + (49)^2 = 27008$$

El segundo término de la derecha de la fórmula 3.1, se estima como sigue:

$$y_{..}^2 = \left(\sum_{i=1}^{a} \sum_{j=1}^{b} y_{ij} \right)^2 = (45 + 43 + 51 + \cdots + 49)^2 = 133636$$

Este término representa la suma de todos los datos elevada al cuadrado. Este término se divide entre el producto de ab, obteniendo lo siguiente

$$\frac{y_{..}^2}{ab} = \frac{1336336}{12} = 26696.333 \qquad (3.2)$$

Al restar el primer término con el segundo, obtenemos la estimación de la suma de cuadrados total.

$$SC_{TOTAL} = \sum_{i=1}^{a} \sum_{j=1}^{b} y_{ij}^2 - \frac{y_{..}^2}{ab} = 27008 - 26696.33 = 311.66667$$

$$SC_{TOTAL} = 311.6667 \qquad (3.3)$$

Grados de libertad de la suma de cuadrados totales

Los grados de libertad de la suma de cuadrados totales, se estiman restándole uno al total de los datos, es decir ab − 1=12 − 1=11.

3.2.2 Estimación de la suma de cuadrados de los tratamientos

La Suma de Cuadrados de Tratamientos mide la variabilidad en los datos asociada a la diferencia de los tratamientos, el cual se representa con $SC_{TRATAMIENTO}$ y se estima usando la fórmula 3.4.

$$SC_{TRATAMIENTO} = \Sigma_{i=1}^{a} \frac{y_{i.}^2}{b} - \frac{y_{..}^2}{ab} \qquad (3.4)$$

Donde $y_{i.}^2 = \left(\Sigma_{j=1}^{b} y_{ij}\right)^2$ es la suma de i-ésimo tratamiento, ab= Total de datos, a = número de tratamientos, b= el número de bloques, además nótese que el segundo término de la derecha de la fórmula 3.4 es el mismo término que aparece en la expresión 3.2.

Considerando los datos del ejemplo de la tabla 3.1, tenemos que

$y_{1.}^2 = \left(\sum_{j=1}^{3} y_{1j}\right)^2 = (139)^2$, y representa la suma de los datos del detergente A, elevado al cuadrado.

$y_{2.}^2 = \left(\Sigma_{j=1}^{3} y_{2j}\right)^2 = (143)^2$, y representa la suma de los datos del detergente B, elevado al cuadrado.

$y_{3.}^2 = \left(\Sigma_{j=1}^{3} y_{3j}\right)^2 = (156)^2$, es la suma de los datos del detergente C, elevado al cuadrado.

$y_{4.}^2 = \left(\Sigma_{j=1}^{3} y_{4j}\right)^2 = (128)^2$, es la suma de los datos del detergente D, elevado al cuadrado.

Tomando el resultado de la expresión 3.2,

$$\frac{y_{..}^2}{ab} = \frac{1336336}{12} = 26696.333$$

Sustituyendo los términos calculados en la fórmula 3.4, obtenemos la suma de cuadrados de los tratamientos

$$SC_{TRATAMIENTO} = \Sigma_{i=1}^{a} \frac{y_{i.}^2}{b} - \frac{y_{..}^2}{ab} = \left[\frac{(139)^2}{3} + \frac{(143)^2}{3} + \frac{(156)^2}{3} + \frac{(128)^2}{3} \right] - 26696.33$$

$SC_{TRATAMIENTO}$=26830-26696=133.67

Grados de libertad de la suma de cuadrados tratamientos

Los grados de libertad de la suma de cuadrados de los tratamientos se obtienen restando un uno al número de tratamientos, en este caso hay cuatro detergentes o cuatro tratamientos por lo que los grados de libertad son (a = número de tratamientos, a-1) 4-1=3.

3.2.3 Estimación de la suma de cuadrados de los bloques

La Suma de Cuadrados de bloques mide la variabilidad en los datos asociada a la diferencia de los bloques, el cual se representa con SC_{BLOQUE} y se estima usando la fórmula 3.5.

$$SC_{BLOQUE} = \sum_{j=1}^{b} \frac{y_{.j}^2}{a} - \frac{y_{..}^2}{ab} \qquad (3.5)$$

Donde $y_{.j}^2 = \left(\sum_{i=1}^{a} y_{ij} \right)^2$ es la suma de j-ésimo bloque, ab= Total de datos, a= número de tratamientos, b= el número de bloques, además nótese que el segundo término de la derecha de la fórmula 3.5 es el mismo término que aparece en la fórmula 3.2.

Considerando los datos del ejemplo de la tabla 3.1, tenemos que

$y_{.1}^2 = \left(\sum_{i=1}^{a} y_{i1} \right)^2$ =$(184)^2$, y representa la suma de los datos en el bloque 1 (Lavadora 1), elevado al cuadrado.

$y_{.2}^2 = \left(\sum_{i=1}^{a} y_{i2} \right)^2 = (173)^2$ y representa la suma de los datos en el bloque 2 (Lavadora 2), elevado al cuadrado.

$y_{.3}^2 = \left(\sum_{i=1}^{a} y_{i3} \right)^2 = (209)^2$, es la suma de los datos en el bloque 3 (Lavadora 3), elevado al cuadrado.

Tomando el resultado de la expresión 3.2,

$$\frac{y_{..}^2}{ab} = \frac{1336336}{12} = 26696.333$$

Sustituyendo estos valores en la ecuación 3.5, tenemos que

$$SC_{BLOQUE} = \sum_{j=1}^{b} \frac{y_{.j}^2}{a} - \frac{y_{..}^2}{ab} = \frac{(184)^2 + (173)^2 + (209)^2}{4} - 26696.33$$

$$SC_{BLOQUE} = \sum_{j=1}^{b} \frac{y_{.j}^2}{a} - \frac{y_{..}^2}{ab} = 26866.5 - 26696.33 = 170.17$$

Los grados de libertad de la suma de cuadrados del bloque se obtienen restando un uno al número de bloques que hay en el experimento, en este caso hay 3 lavadoras o 3 bloques, por lo que los grados de libertad son (b= numero de bloques, b-1) 3-1=2.

3.2.4 Estimación de la suma de cuadrados del error o residual

Suma de Cuadrados del Error o Residual, es la variabilidad total menos la variabilidad de los tratamientos menos la variabilidad del bloque y simbólicamente lo representaremos por SC_{ERROR}, el cual se obtendrá con la fórmula 3.6.

$$SC_{ERROR} = SC_{TOTAL} - SC_{TRATAMIENTO} - SC_{BLOQUE} \qquad (3.6)$$

Dado que tenemos lo estimado en la suma de cuadrados total (3.3) y en la suma de cuadrados de los tratamientos (3.4), y la suma de cuadrados del bloque (3.5) encontramos que la suma de cuadrados del error es:

$$SC_{ERROR} = 311.66667 - 133.67 - 170.17 = 7.826 \qquad (3.7)$$

Los grados de libertad de la suma de cuadrados del error se obtienen multiplicando los grados de libertad de los tratamientos por los grados de libertad del bloque (a-1)(b-1), así tenemos

(4-1)(3-1)= 3 x 2 = 6.

3.2.5 Estimación de los cuadrados medios

Para obtener la tabla de Análisis De Varianza, es necesario calcular los cuadrados medios.

3.2.6 Estimación del cuadrado medio de los tratamientos

El cuadrado medio del tratamiento es el resultado de dividir la suma de cuadrados de los tratamientos entre sus grados de libertad.

$$CM_{TRATAMIENTO} = \frac{SC_{TRATAMIENTO}}{a-1} = \frac{133.67}{4-1} = \frac{133.67}{3} = 44.55 \qquad (3.8)$$

3.2.7 Estimación del cuadrado medio del bloque

El cuadrado medio del bloque es el resultado de dividir la suma de cuadrados del bloque entre sus grados de libertad.

$$\text{CM}_{\text{BLOQUE}} = \frac{SC_{BLOQUE}}{b-1} = \frac{170.17}{3-1} = \frac{170.17}{2} = 85.085 \qquad (3.9)$$

3.2.8 Estimación del cuadrado medio del error

El cuadrado medio del error es el resultado de dividir la suma de cuadrados del error entre sus grados de libertad.

$$\text{CM}_{\text{ERROR}} = \frac{SC_{ERROR}}{(a-1)(b-1)} = \frac{7.82667}{(3)(2)} = \frac{7.82667}{6} = 1.30 \qquad (3.10)$$

3.2.9 Obtención de la F calculada o de la F_0

La F calculada o la F_0 es el resultado de dividir el Cuadrado Medio de los Tratamientos entre el Cuadrado Medio del Error, es decir

$$F_0 = \frac{CM_{TRATAMIENTO}}{CM_{ERROR}} = \frac{44.55}{1.30} = 34.13 \qquad (3.11)$$

3.2.10 Tabla de análisis de varianza para el diseño por bloques

Todos los resultados anteriormente encontrados se sintetizan en una tabla llamada Tabla de Análisis de Varianza como se puede ver en la tabla 3.2.

Tabla de Análisis de Varianza

Fuente de Variación	Suma de Cuadrados	Grados de Libertad	Cuadrados Medios	F-calculada
A:DETERGENTE	133.667	3	44.5556	34.13
B:LAVADORA	170.167	2	85.0833	
RESIDUAL	7.83333	6	1.30556	
TOTAL	311.667	11		

Tabla 3.2 Análisis de Varianza

3.2.11 Obtención de la F de tablas F(tablas)

En las tablas de la distribución F de Fisher (Apéndice A) podemos ver que para un con 3 grados de libertad en el numerador y 6 grados de libertad en el denominador se tiene que el valor de la F(tablas) es 4.76.

3.2.12 Comparación de la F de tablas con la F-calculada

Como Fo=34.13>F(tablas)=4.76 se concluye que sí hay efecto significativo del tipo de detergente en la blancura de la ropa, es decir el rendimiento del detergente no es mismo en los detergentes estudiados.

Debido a que la tabla de análisis de varianza sólo indica si hay efecto o no en el tipo de detergente. Pero no dice cual detergente es el mejor en blancura es necesario realizar una prueba de comparaciones múltiples para investigar cual es el mejor, como se muestra en seguida:

3.3 Prueba de LSD: Prueba de la mínima diferencia significativa

Supongamos que después de haber rechazado la hipótesis nula, con base en una prueba F de análisis de varianza, se desea probar $H_O : \mu_i = \mu_j$, para toda i ≠ j, para todas las posibles parejas de medias de los tratamientos.

Suponiendo una hipótesis alterna bilateral, dos medias se consideran diferentes si:

$$\left|\overline{Y}_i - \overline{Y}_j\right| > t_{\frac{\alpha}{2}},(a-1)(b-1)\sqrt{\frac{2CM_{ERROR}}{b}} \qquad (3.12)$$

Donde CM_{ERROR} es el cuadrado medio del error de la tabla de *Análisis de Varianza*, b es el número de bloques en el diseño.

La expresión

$$\text{LSD} = t_{\frac{\alpha}{2}},(a-1)(b-1)\sqrt{\frac{2CM_{ERROR}}{b}} \qquad (3.13)$$

Se le conoce como *Mínima Diferencia Significativa.*

El procedimiento de la prueba de LSD, simplemente consiste en comparar las diferencias observadas entre cada par de promedios con el valor correspondiente del LSD. Si $\left|\overline{Y_{i.}} - \overline{Y_{j.}}\right| > LSD$, se concluye que las medias poblacionales μ_i y μ_j son estadísticamente diferentes.

Tomando los datos de la tabla 3.1, tenemos que el promedio de las replicas de cada detergente son:

Detergente	Media
A	46.3
B	47.6
C	52
D	42.6

Ahora obtendremos el valor absoluto de la diferencia de cada par de comparación, como se muestra en la tabla 3.3.

Comparación	Diferencia absoluta
A con B	$\|46.3-47.6\|=1.3$
A con C	$\|46.3-52\|=5.7$
A con D	$\|46.3-42.6\|=3.7$
B con C	$\|47.6-52\|=4.4$
B con D	$\|47.6-42.6\|=5$
C con D	$\|52-42.6\|=9.4$

Tabla 3.3 diferencias Absolutas.

Viendo las tablas de la distribución t-student (Apéndice B), para un nivel de confianza dado α =0.05 y 6 grados de libertad el valor del estadístico t es:

$$t_{\frac{\alpha}{2}},(a-1)(b-1)=t_{0.025},(6)=2.446$$

De la tabla del Análisis de Varianza (3.2), tenemos que valor de cuadrado medio del error es:

$$CM_{ERROR}=1.30556$$

y como b=3, sustituyendo estos valores en la fórmula (3.13) tenemos que el valor del LSD es:

$$LSD=2.44\sqrt{\frac{2(1.30556)}{3}}=2.27$$

Comparando el valor absoluto de la diferencia de cada par de medias con el valor de LSD, tenemos la tabla 2.4,

Comparación	Diferencia Absoluta	Comparación con el Valor de LSD
A con B	$\|46.3 - 47.6\| = 1.3$	<2.27
A con C	$\|46.3 - 52\| = 5.7$	>2.27*
A con D	$\|46.3 - 42.6\| = 3.7$	>2.27*
B con C	$\|47.6 - 52\| = 4.4$	>2.27*
B con D	$\|47.6 - 42.6\| = 5$	>2.27*
C con D	$\|52 - 42.6\| = 9.4$	>2.27*

** Existen diferencias significativas*
Tabla 3.4 Comparaciones con LSD

Los resultados de la tabla 3.4 son más fáciles de visualizar si agrupamos los detergentes en grupos homogéneos (tabla 3.5). Para ello se ordenan los tratamientos (ascendente o descendente) y se agrupan conforme a los resultados del LSD, donde los detergentes que pertenecen a un mismo grupo significa que no hay deferencias estadísticamente significativas en sus promedios.

Detergente	Casos	Media	Grupos Homogéneos
D	3	42.6667	X
A	3	46.3333	X
B	3	47.6667	X
C	3	52.0	X

Tabla 3.5 Formación de grupos homogéneos.

De acuerdo a los resultados anteriores podemos concluir que el detergente C es solo un grupo homogéneo y es el que da mayor blancura, ya que presenta el mayor promedio que los otros tres.

3.4 Supuestos del modelo de bloques aleatorizados

Al igual que en el diseño unifactorial es necesario que en el diseño por bloques también se chequen los supuestos de los residuales, los cuales deben cumplir con tres:

1.- Los residuales deben ser independientes
2.- Los residuales deben tener varianza constante
3.- Los residuales se distribuyen normal.

Si alguno de esos tres no se cumple es suficiente para invalidar el Análisis de Varianza. Para checar estos tres supuestos se deben calcular primeramente los residuales mediante la siguiente fórmula:

Para ello, primeramente se calculan los residuales mediante la siguiente formula:

$$e_{ij} = y_{ij} - \overline{y}_{i.} - \overline{y}_{.j} + \overline{y}_{..}$$

Donde y_{ij} es el valor obtenido en el experimento, $\overline{y}_{i.}$ es el promedio del i-ésimo detergente, $\overline{y}_{.j}$ es el j-ésimo bloque, $\overline{y}_{..}$ es el promedio general.

Los residuales para el detergente A, se calculan así:

e_{11}=45-46.33-46+47.17=-0.16

e_{12}=43-46.33-43.25+47.17=0.59

e_{13}=51-46.33-52.25+47.17=-0.41

Los residuales del detergente B son:

e_{21}=47-47.67-46+47.17=0.5
e_{22}=44-47.67-43.25+47.17=0.25
e_{23}=52-47.67-52.25+47.17=-0.75

Los residuales para el detergente C:

e_{31}=50-52-46+47.17=-0.83
e_{32}=49-52-43.25+47.17=0.92
e_{33}=57-52-52.25+47.17=-0.08

Los residuales para el detergente D:

e_{41}=42-42.67-46+47.17=0.50
e_{42}=37-42.67-43.25+47.17=-1.75
e_{43}=49-42.67-52.25+47.17=1.25

Los resultados anteriores se sintetizan en la siguiente tabla:

Detergentes			
A	B	C	D
-0.16	0.5	-0.83	0.5
0.59	0.25	0.92	-1.75
-0.41	-0.75	-0.08	1.25

3.4.1 Supuesto de varianza constante

El supuesto de varianza constante se puede checar en una grafica de X-Y, en el que los tratamientos (DETERGENTES) se especifican en el eje X y el residual en el eje Y. Esta gráfica recibe el nombre: GRÁFICA DE RESIDUALES *VS* LOS NIVELES DEL FACTOR, y se puede ver en la figura 3.1.

Gráfica de residuales vs los niveles del factor

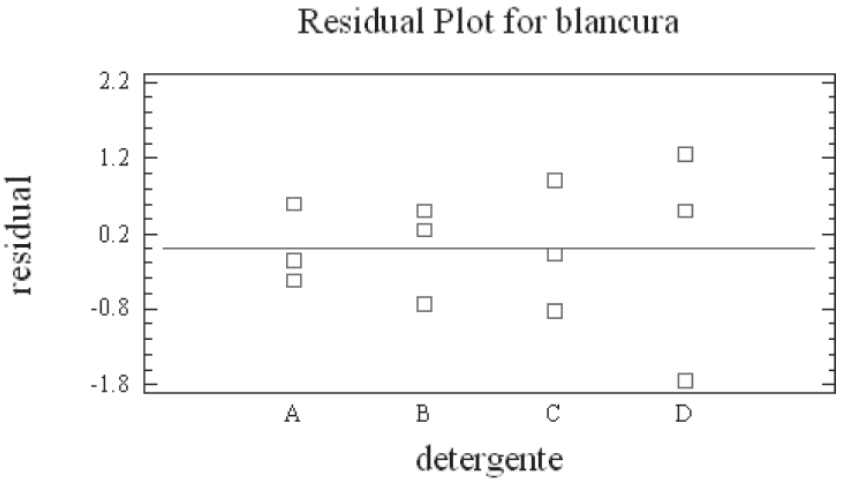


Figura 3.1 Gráfica para checar la varianza constante de los residuales

En esta figura se presentan gráficamente los niveles del factor contra los residuales. En esta gráfica no debe presentarse ningún tipo patrón de comportamiento. La variación de los puntos tanto del los niveles A, B , C y D no deben presentar diferencias. No se debe distinguir la presencia de un embudo. En este caso no se presenta patrón inusual por lo que podemos concluir que si se cumple el supuesto de varianza constante.

3.4.3 Supuesto de independencia

Para checar el supuesto de independencia se requiere ordenar los residuales según el orden en que se corrió el experimento

Bloque	**Detergentes**			
	A	B	C	D
1	(2)-0.16	(1)0.5	(4)-0.83	(3)0.5
2	(4)0.59	(1)0.25	(2)0.92	(3)-1.75
3	(2)-0.41	(1)-0.75	(4)-0.08	(3)1.25

Por ejemplo, El detergente A se corrió en la segunda corrida dentro de la lavadora uno, en la corrida cuatro dentro de la lavadora dos y en la segunda corrida dentro de la lavadora tres, y así sucesivamente para los otros detergentes.

Residuales *vs* orden de corrida (o secuencia de tiempo)

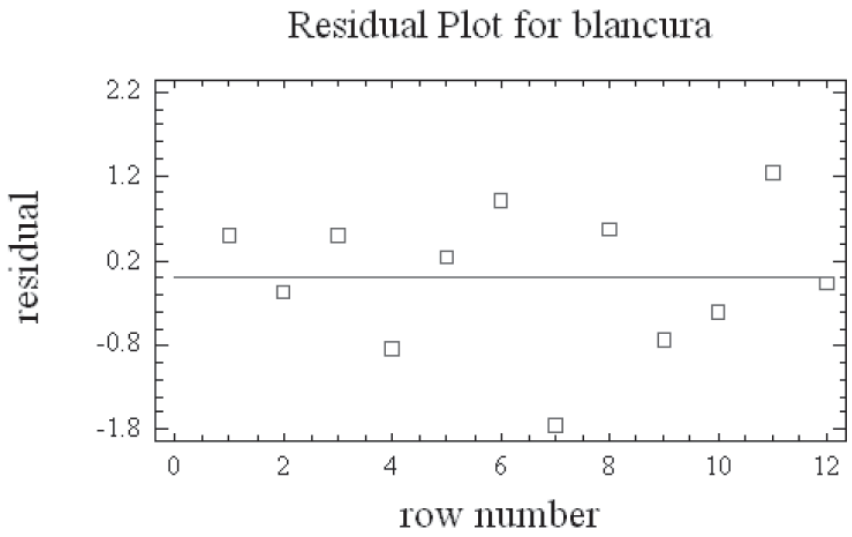


Figura 3.2 Gráfica para checar la independencia de los residuales.

Se construye una gráfica X-Y, donde en el eje X se especifica el orden en de la prueba experimental que se corrió y en el eje Y se grafica el correspondiente residual de esa prueba, en la Figura 3.2 se muestra la tendencias de los residuales. Es esta gráfica no se debe presentar ningún tipo de patrón de comportamiento, los puntos deben verse completamente dispersos. De acuerdo a ésta a la figura 3.2, se puede concluir que sí se cumple el supuesto de independencia.

3.4.2 Supuesto de normalidad

Un procedimiento útil consiste en construir una gráfica de probabilidad normal de los residuos. Una gráfica de este tipo es la representación de la distribución acumulada de los residuos sobre papel de probabilidad normal, en otras palabras, es papel para gráficas cuya escala de ordenadas es tal que la distribución normal acumulada sea una recta. Para construir una gráfica de probabilidad normal se hace el siguiente procedimiento:

1. Se ordenan los residuos en orden ascendente:

Orden k	Residuales Ordenados
1	-1.75
2	-0.83
3	-0.75
4	-0.41
5	-0.16
6	-0.08
7	0.25
8	0.5
9	0.5
10	0.59
11	0.92
12	1.25

2. A cada residuo se le calcula su punto de probabilidad acumulada mediante la siguiente fórmula:

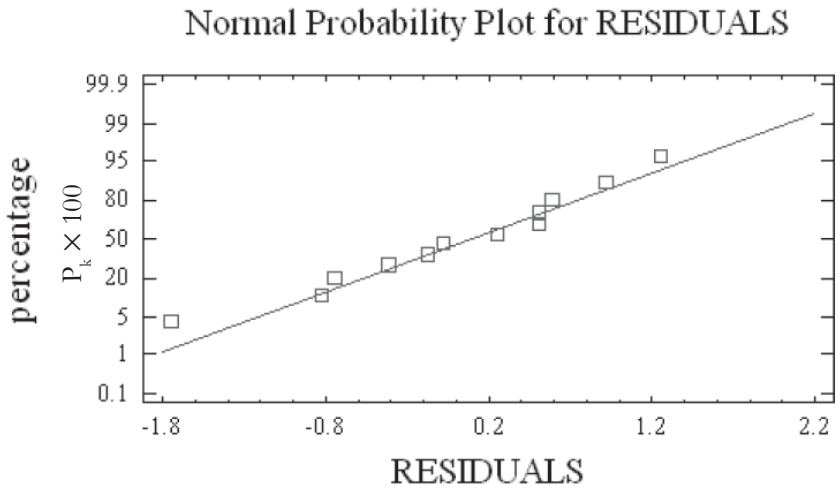
$$P_k = \frac{(k-0.5)}{N}$$

Orden k	Residuales Ordenados	$P_k = \frac{(k-0.5)}{N}$
1	-1.75	0.041666667
2	-0.83	0.125
3	-0.75	0.208333333
4	-0.41	0.291666667
5	-0.16	0.375
6	-0.08	0.458333333
7	0.25	0.541666667
8	0.5	0.625
9	0.5	0.708333333
10	0.59	0.791666667
11	0.92	0.875
12	1.25	0.958333333

3. Se grafican e_{ij} en el eje de las X's y los

$$P_k = \frac{(k-0.5)}{N}$$

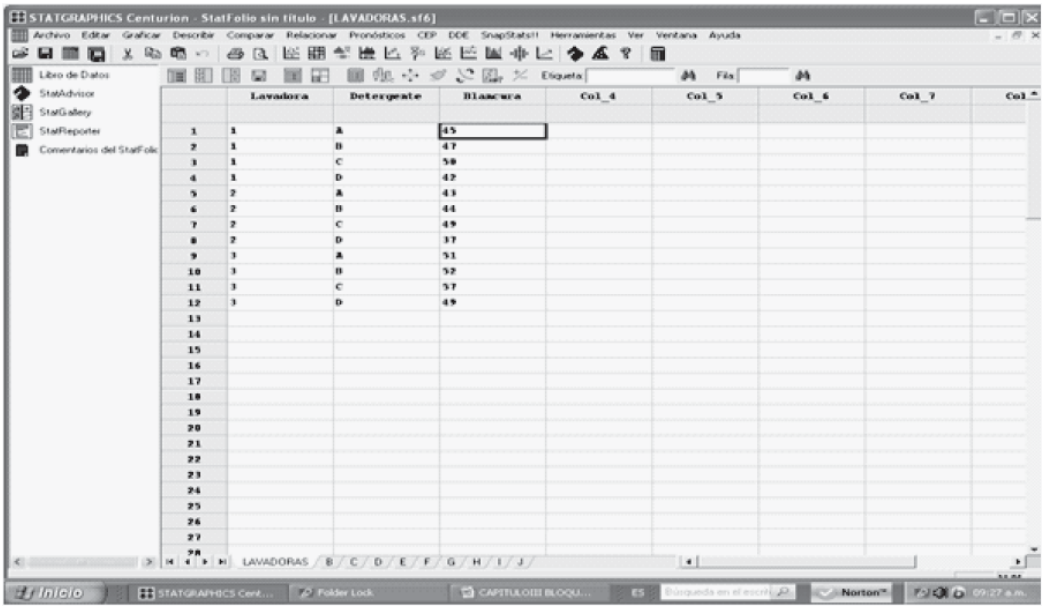
En el eje de las Y's, como se muestra a continuación:



En está gráfica se puede ver que la mayoría de los puntos se ajustan a la línea recta, lo que significa que los residuales si cumplen el supuesto de normalidad.

3.5 Captura de datos y salida de resultados del ejemplo 3.1 usando el *statgraphics centurion XV*

3.5.1 Captura de datos del ejemplo 3.1



3.5.2 Análisis de Varianza

Análisis de Varianza para Blancura - Suma de Cuadrados Tipo III

Fuente	Suma de Cuadrados	Gl	Cuadrado Medio	Razón-F	Valor-P
Efectos principales					
A:Detergente	133.667	3	44.5556	34.13	0.0004
B:Lavadora	170.167	2	85.0833	65.17	0.0001
RESIDUOS	7.83333	6	1.30556		
TOTAL (CORREGIDO)	311.667	11			

Todas las razones-F se basan en el cuadrado medio del error residual

3.5.3 Prueba de LSD para los detergentes

Pruebas de Múltiple Rangos para Blancura por Detergente

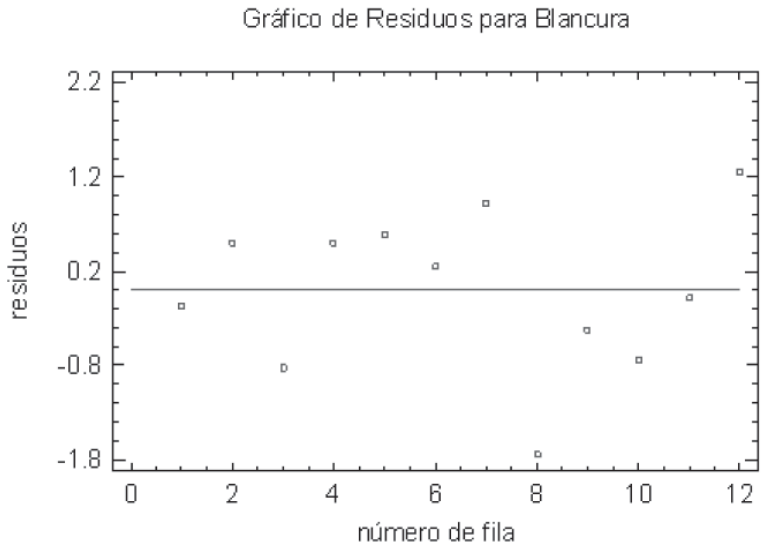
Detergente	Casos	Media LS	Sigma LS	Grupos Homogéneos
D	3	42.6667	0.659686	X
A	3	46.3333	0.659686	X
B	3	47.6667	0.659686	X
C	3	52.0	0.659686	X

Contraste	Sig.	Diferencia	+/- Límites
A - B		-1.33333	2.28282
A - C	*	-5.66667	2.28282
A - D	*	3.66667	2.28282
B - C	*	-4.33333	2.28282
B - D	*	5.0	2.28282
C - D	*	9.33333	2.28282

3.5.4 Chequeo de supuestos

3.5.4.1 Varianza constante en los residuos

3.5.4.2 Independencia en los residuos



3.5.4.3 Normalidad en los residuos

3.6 Ejercicios

Práctica 3.6.1: Un químico desea probar el efecto de cuatro agentes químicos en la resistencia de cierto tipo de tela. Debido a que podría haber variabilidad de rollo a rollo de tela, decide correr un diseño en bloques al azar, considerando a cada rollo como un bloque. Los resultados de resistencia son:

Químico	Rollo 1	Rollo 2	Rollo 3	Rollo 4	Rollo 5
1	73	68	74	71	67
2	73	67	75	72	70
3	75	68	78	73	68
4	73	71	75	75	69

a. ¿En qué orden se debieron correr los experimentos?
b. Realice un análisis de varianza para tales datos y obtenga conclusiones.
c. Verifique supuestos.

Práctica 3.6.2. Para el ensamble de un artículo en particular se está considerando cuatro máquinas diferentes, M1, M2, M3, M4. Se decide que deben utilizarse seis operadores diferentes en un experimento para comparar las máquinas. Las máquinas se asignan a cada operador en un orden aleatorio. La operación de las máquinas requieren determinada destreza física y se anticipa que puede haber una diferencia entre los operarios en cuanto a la velocidad con la cual operarán la maquinaria. Se registraron los siguientes tiempos, en segundos, para el ensamble del producto determinado:

Maquinaria	Operador					
	1	2	3	4	5	6
1	42.5	39.3	39.6	39.9	42.9	43.6
2	39.8	40.1	40.5	42.3	42.5	43.1
3	40.2	40.5	41.3	43.4	44.9	45.1
4	41.3	40.2	43.5	44.2	45.9	43.3

Especifique el nombre del diseño
Escriba el modelo matemático del diseño
(c)¿ En que orden se debieron correr los experimentos ?
(d) Realice un análisis de varianza para tales datos y obtenga conclusiones.
(e) Realice los análisis complementarios si es necesario

Práctica 3.6.3. Un experimento realizado en el cultivo de soya se ensayaron varias niveles de humedad aprovechable y varios niveles de fósforo. Los tratamientos son :

1.- 20% de humedad y 30 kg/Ha de fósforo
2.- 40% de humedad y 30 kg/Ha de fósforo
3.- 20% de humedad y 60 kg/Ha de fósforo
4.- 40% de humedad y 60 kg/Ha de fósforo

El experimento se realizó con seis repeticiones. Los bloques fueron franjas de terreno relativamente uniformes. La variable medida fue el rendimiento de grano (en kg).

Bloque	Tratamientos			
	1	2	3	4
I	7.3	6.8	6.7	5.7
II	7.2	5.5	7.3	6.9
III	7.6	6.8	6.8	6.4
IV	7.2	6.5	7.4	6.1
V	7.5	6.8	7.5	6.4
VI	7.6	7.1	6.3	6.3

a. ¿En qué orden se debieron correr los experimentos?
b. Realice un análisis de varianza para tales datos y obtenga conclusiones.
c. Verifique supuestos.

Práctica 3.6.4. Se realizó un estudio para comparar el rendimiento de tres marcas de gasolina en competencia. Se seleccionan cuatro modelos diferentes de automóvil de tamaño variable. Los datos, en millas por galon son los siguientes:

Modelo	Marca de Gasolina		
	A	B	C
A	32.4	35.6	38.7
B	28.8	28.6	29.9
C	36.5	37.6	39.1
D	34.4	36.2	37.9

A) Indica el diseño experimental
B) Escribe las hipótesis a aprobar
C) Realiza el anova correspondiente
D) ¿Cuál marca de gasolina es mejor?

Práctica 3.6.5. Tres diferentes soluciones para lavar están siendo comparadas con el objeto de estudiar su efectividad en el retraso del crecimiento de bacterias en envases de leche de 5 galones. El análisis se realiza en un laboratorio y sólo puede efectuarse tres pruebas en un mismo día. Como los días son una fuente variabilidad potencial, el experimentador decide usar un diseño aleatorizado por bloques. Las observaciones se recopilaron durante cuatro días y los datos aparecen a continuación.

Solución	Días			
	1	2	3	4
1	13	22	18	39
2	16	24	17	44
3	5	4	1	22

E) Indica el diseño experimental
F) Escribe las hipótesis a aprobar
G) Realiza el anova correspondiente
H) ¿Cuál solucion es mejor?

Práctica 3.6.6. Un ingeniero industrial está investigando el efecto que tienen cuatro métodos de ensamblaje (A, B, C, y D) sobre el tiempo de ensamblaje de un componente para televisores a color. Se seleccionan 4 operadores para realizar este estudio. Se sabe que un operador a otro operador puede existir diferencia por lo que se decidió realizar un diseño por bloques aleatorizados.

Método	Operador			
	1	2	3	4
A	10	14	7	8
B	7	18	11	8
C	5	10	11	9
D	10	10	12	14

a. Especifique el nombre del diseño experimental
b. Escribe el modelo matemático interpretando cada termino según el problema
c. Escribe las hipótesis a probar
d. Realiza el análisis adecuado para probar las hipótesis
e. Con los análisis complementarios establece el método de ensamblaje con el que se obtiene menor tiempo.

Práctica 3.6.7. El departamento de matemáticas de una universidad desea evaluar la capacidad de enseñanza de cuatro profesores. A fin de eliminar cualquier efecto debido a los diferentes cursos de matemáticas cada profesor enseña una sección de cada uno de cuatro diferentes cursos programados. Los datos muestran las calificaciones promedio asignadas por estos profesores a 16 estudiantes de aproximadamente de igual capacidad.

Profesor	Curso			
	Álgebra	Geometría	Estadística	Cálculo
A	84	79	63	97
B	91	82	80	93
C	59	70	77	80
D	75	91	75	68

a. Especifique el nombre del diseño
b. En que orden se realizó el experimento. Haz un bosquejo.
c. Escribe el modelo matemático
d. Utiliza un nivel de significancia de 0.05 para probar la hipótesis de que los diferentes profesores no tienen efecto en las calificaciones.

Experimentos de dos factores

Capítulo IV

Capítulo IV

Experimentos de dos factores

4.1 Principios y definiciones básicas

Los arreglos factoriales se utilizan cuando en una investigación se pretende estudiar simultáneamente la influencia del cambio de nivel de varios factores sobre la variable de respuesta. Se entiende como diseño factorial cuando cada repetición o réplica completa del experimento incluye a todas las combinaciones posibles de los niveles de los factores bajo estudio. Este tipo de diseño permite estimar los efectos simples de los factores y el efecto de las interacciones de dichos factores. Sin embargo, se evalúan de manera independiente por lo que se tendrá un par de hipótesis para cada efecto.

El efecto de un factor simple (o principal) se define como el cambio producido en la variable de respuesta debido al cambio de un nivel a otro en el factor.

El efecto de interacción de dos factores se define como el cambio producido en la variable de respuesta al cambiar los niveles de un factor con respecto a los niveles del otro factor.

Para nombrar estos diseños se emplea con frecuencia la notación matricial, escribiendo el número de niveles de cada uno de los factores de estudio. Por ejemplo si se estudian 5 niveles para el factor A y 3 para el B se dice que es un diseño factorial 5X3.

El modelo matemático está formado por todos los efectos de interés en el estudio, para ello usaremos símbolos correspondientes a los factores y a las interacciones, por ejemplo si son dos factores, el factor A se representa con τ y se le asigna el subíndice i y al factor B con β se le asigna el subíndice j la interacción se representaría como $(\tau\beta)_{ij}$, mientras que el error aleatorio se representaría con ε_{ijk}, por lo que el modelo para este diseño es,

$$Y_{ijk} = \mu + \tau_i + \beta_j + \tau\beta_{ij} + \varepsilon_{ijk}$$

Para escribir las hipótesis del diseño se consideraran de manera independiente los efectos de los factores simples también denominados efectos principales y los efectos de las interacciones. Así para un diseño de dos factores se tendrán tres pares de hipótesis; una para el efecto simple del factor A, otra para el efecto simple del factor B y otra para la interacción AB.

Textualmente estas hipótesis se escribirían así:

Para los efectos simples:

Ho: $\tau_i=0$ El efecto simple del factor A no influye en la variable de respuesta.

Ha: $\tau_i \neq 0$ El efecto simple del factor A si influye en la variable de respuesta.

Ho: $\beta_j =0$ El efecto simple del factor B no afecta la variable de respuesta.

Ha: $\beta_j \neq 0$ El efecto simple del factor B si afecta la variable de respuesta.

Para las interacciones
Ho: $(\tau\beta)_{ij} = 0$ No hay efecto de la interacción AB en la variable de respuesta.
Ha: $(\tau\beta)_{ij} \neq 0$ Si hay efecto de la interacción AB en la variable de respuesta.

4. 2 Ejemplo

Con el fin de precisar las condiciones óptimas de un baño de níquel, los efectos de la concentración de sulfona y la temperatura del baño en el poder de reflexión de un metal niquelado, se realiza el siguiente experimento.

Factor A	Factor	Réplicas		
Concentración	Temperatura	I	II	III
5	75	35	39	36
5	100	31	37	36
5	125	30	31	33
5	150	28	20	23
5	175	19	18	22
10	75	38	46	41
10	100	36	44	39
10	125	39	32	38
10	150	35	47	40
10	175	30	38	31

Tabla No. 4.1 Resultados del experimento.

Nótese que es un diseño de dos factores, un factor A que es la concentración de sulfona con dos niveles 5 y 10; un factor B que es la temperatura con cinco niveles 75, 100, 125, 150 y 175; la variable de respuesta el poder de reflexión de un metal niquelado. El modelo matemático para este diseño es,

$$Y_{ijk} = \mu + \tau_i + \beta_j + (\tau\beta)_{ij} + \varepsilon_{ijk}$$

Y_{ijk} es la variable de respuesta (poder de reflexión), μ es la media general del poder de reflexión, τ_i es el efecto simple de la concentración de sulfona, β_j es el efecto de la temperatura, $(\tau\beta)_{ij}$ el efecto de la interacción de la concentración de sulfona y la temperatura, y ε_{ijk} es el error aleatorio.

Las hipótesis que se pueden probar son:

1)
Ho: no influye el efecto de la concentración de sulfona en el poder de reflexión ($H_o : \tau_i = 0$).
Ha: si influye el efecto de la concentración de sulfona en el poder de reflexión ($H_a : \tau_i \neq 0$).

2)

Ho: no influye el efecto de la temperatura en el poder de reflexión ($H_o : \beta_j = 0$).

Ha: si influye el efecto de la temperatura en el poder de reflexión $\left(H_a : \beta_j = 0\right)$.

3)

Ho: no hay efecto de interacción entre la concentración de sulfona y la temperatura en el poder de reflexión $\left(H_o : (\tau\beta)_{ij} = 0\right)$.

Ha: si hay efecto de interacción entre la concentración de sulfona y la temperatura en el poder de reflexión $\left(H_o : (\tau\beta)_{ij} \neq 0\right)$.

4.2.1 Análisis de varianza

Para probar las hipótesis anteriores, es necesario realizar un análisis de varianza (ANOVA). Por lo que la descomposición de la variabilidad total se determina mediante la siguiente ecuación,

$$SC_{TOTAL} = SC_A + SC_B + SC_{AB} + SC_{ERROR} \qquad (4.1)$$

SC_{TOTAL} es la suma de cuadrados totales, la cual se obtiene mediante la siguiente fórmula:

$$SC_{TOTAL} = \sum_{i=1}^{a} \sum_{j=1}^{b} \sum_{k=1}^{n} y_{ijk}^2 - \frac{y_{...}^2}{abn} \qquad (4.2)$$

Donde $y_{...} = \sum_{i=1}^{a} \sum_{j=1}^{b} \sum_{k=1}^{n} y_{ijk}$ es la suma de todos los datos y y^2... es la suma de todos los datos elevada al cuadrado, a número de niveles del factor A, b número de niveles del factor B, n número de réplicas en el experimento.

SS_A es la suma de cuadrados del efecto simple del factor A, y se calcula de la siguiente fórmula:

$$SC_A = \sum_{i=1}^{a} \frac{y_{i..}^2}{bn} - \frac{y^2}{abn} \qquad (4.3)$$

Donde $y_{i..} = \sum_{j=1}^{b} \sum_{k=1}^{n} y_{ijk}$, $y_{i..}^2$ representan respectivamente, la suma de los datos y el cuadrado de la suma de los datos del i-ésimo tratamiento del factor A.

SC_B es la suma de cuadrados del efecto simple del factor B; para calcularla se usara la siguiente fórmula:

$$SC_B = \sum_{j=1}^{b} \frac{y_{.j.}^2}{an} - \frac{y_{...}^2}{abn} \qquad (4.4)$$

Donde $y_{.j.} = \sum_{i=1}^{a} \sum_{k=1}^{n} y_{ijk}$, $y_{.j.}^2$ representan respectivamente a la suma de los datos y el cuadrado de los datos del j-ésimo tratamiento del factor B.

SC_{AB} es la suma de cuadrados de la interacción AB; para obtenerla es necesario aplicar las fórmulas 4.5 y 4.6.

$$SC_{Subtotales} = \sum_{i=1}^{a} \sum_{j=1}^{b} \frac{y_{ij.}^2}{n} - \frac{y_{...}^2}{abn} \qquad (4.5)$$

$$SC_{AB} = SC_{Subtotales} - SC_A - SC_B \qquad (4.6)$$

Donde $y_{ij} = \sum_{k=1}^{n} y_{ijk}$, $y_{ij.}^2$ son respectivamente la suma de los datos de las réplicas, y el cuadrado de la suma de los datos de las réplicas de la combinación del i-ésimo y j-ésimo tratamiento.

SC_{ERROR} es la suma de cuadrados del error y se obtiene usando la ecuación 4.7.

$$SC_{ERROR} = SC_{TOTAL} - SC_{Subtotales} \qquad (4.7)$$

4. 3.2 Cálculo de la tabla de análisis de varianza

Para obtener la tabla de análisis de varianza, seguiremos estos pasos:

1. Obtención de la tabla No. 4.2.

En ella se encuentran los subtotales de los datos de cada combinación, por ejemplo el subtotal de la combinación del nivel 5 de concentración y del nivel 75 de temperatura es la suma 35+39+36=110, el subtotal de la combinación del nivel 10 de concentración y del nivel 75 de temperatura es la suma de 38+45+41=125 y así sucesivamente; la suma de los subtotales de los niveles de temperatura cuando se trabaja en concentración 5 es el total 1 y el total 2 es la suma de los subtotales de los niveles de temperatura cuando se trabaja en la concentración 10. La suma total es el resultado del total 1 más el total 2, que en este caso es igual a 1012.

		Réplicas			Subtotales
Concentración	Temperatura	1	2	3	
5	75	35	39	36	110
5	100	31	37	36	104
5	125	30	31	33	94
5	150	28	20	23	71
5	175	19	18	22	59
	Total 1				**438**
10	75	38	46	41	125
10	100	36	44	39	119
10	125	39	32	38	109
10	150	35	47	40	122
10	175	30	38	31	99
	Total 2				**574**
Total 1 +Total 2 =		**Suma Total**			**1012**

Tabla No. 4.2 Subtotales, Total 1 y 2, Suma Total.

2. Cálculo de SC_{TOTAL}.

Con la ecuación 4.2 se obtiene la suma de cuadrados totales, dicha ecuación cuenta con dos términos, así que iniciamos con el primer término $\sum_{i=1}^{a}\sum_{j=1}^{b}\sum_{k=1}^{n} y^2_{ijk}$, que representa la suma de los cuadrados de los datos,

$$\sum_{i=1}^{a}\sum_{j=1}^{b}\sum_{k=1}^{n} y_{ijk}^2 = (35)^2 + (39)^2 + (36)^2 + \ldots + (31)^2 = 35822$$

Para el segundo término de dicha ecuación, denominado a menudo factor de corrección, primeramente se obtiene la suma de todos los datos, $y_{...} = \sum_{i=1}^{a}\sum_{j=1}^{b}\sum_{k=1}^{n} y_{ijk} = 35 + 39 + 36 + \ldots + 31 = 1012$ en seguida este resultado se eleva al cuadrado y se divide por el total de datos, $\frac{y_{...}^2}{abn} = \frac{(1012)^2}{(2)(5)(3)} = 34138.1333$, la diferencia del primer término con el segundo término de la ecuación 4.2, se obtiene la SC_{TOTAL} (Suma de Cuadrados Totales),

SC_{TOTAL} = 35822 − 34138.1333 = 1683.8667

3. Obtención de la SC_A (Suma de cuadrados del efecto simple del factor concentración, factor A).

Con la ecuación 4.3 y el total 1 y el total 2 de la tabla 4.2, así como el valor de 34138.1333 resultado del segundo término de la SC_{TOTAL}, tenemos que el resultado de la SC_A es de 616.5333, los cálculos se ven en seguida,

$$SC_A = \frac{(438)^2 + (574)^2}{15} - 34{,}138.1333$$

$$SC_A = 34754.66667 - 34138.1333 = 616.5333666$$

4. Determinación de la SC_B (Suma de cuadrados del efecto simple del factor temperatura, factor B).

Para el cálculo de la SSB construimos la tabla 4.3, en ella se encuentran todos los subtotales de cada nivel de temperatura. Ahora, con la ecuación 4.4, tenemos que el valor de la SC_B es de 591.20, resultado obtenido de la siguiente forma:

$$SC_B = \frac{(235)^2 + (223)^2 + (203)^2 + (193)^2 + (158)^2}{6} - 34{,}138.1333$$

$$SC_B = 34729.3333 - 34138.1333 = 591.20$$

	Réplicas			Media	
Temperatura	1	2	3		
75	35	39	36		
75	38	46	41		
Subtotal 1				235	39.16666667
100	31	37	36		
100	36	44	39		
Subtotal 2				223	37.16666667
125	30	31	33		
125	39	32	38		
Subtotal 3				203	33.83333333
150	28	20	23		
150	35	47	40		
Subtotal 4				193	32.16666667
175	19	18	22		
175	30	38	31		
Subtotal 5				158	26.33333333

Tabla No.4.3 Subtotales de los niveles de temperatura.

5. Obtención de la SC_{AB} (Sumas de cuadrados para la interacción de concentración y temperatura).

Para este caso iniciamos construyendo la tabla 4.4. El valor de 1403.8667 es el resultado del $SC_{subtotales}$, cuyo valor se obtuvo mediante la ecuación 4.5, como se muestra a continuación,

	Temperatura				
Concentración	75	100	125	150	175
5	110	104	94	71	59
10	125	119	109	122	99

Tabla No. 4.4 Subtotales de cada combinación.

$$SC_{Subtotales} = \frac{(110)^2 + (104)^2 + (94)^2 + (71)^2 + (59)^2 + (125)^2 + (119)^2 + (109)^2 + (122)^2 + (99)^2}{3}$$

$- 341381333$

$= 14038667$

Con la ecuación 4.6 se tiene que la suma de cuadrados de la interacción es de 196.13337, valor encontrado mediante los siguientes cálculos:

$$SC_{AB} = 1403.8667 - 616.5333 - 591.20 = 196.13337$$

6. Determinación de la suma de cuadrados del error (SC_{ERROR}).

La suma de cuadrados del error es el resultado de la diferencia de la SC_{TOTAL} menos $SC_{SUBTOTALES}$ (ver la ecuación 4.7), que en este caso es el valor de 280; en seguida obsérvese los cálculos:

$$SC_{ERROR} = 1683.8667 - 1403.8667 = 280$$

Esta suma también puede obtenerse con la ecuación 4.8. En el apéndice D se muestra el desglose para la obtención de esta ecuación.

$$SC_{ERROR} = \sum_{i=1}^{a}\sum_{j=1}^{b}\sum_{k=1}^{n} y_{ijk}^2 - \sum_{i=1}^{a}\sum_{j=1}^{b}\frac{y_{ij.}^2}{n} \quad (4.8)$$

A la suma de todos los datos al cuadrado se le resta el primer término de la ecuación 4.5, donde las sumas de las combinaciones de la tabla 4.4 se elevaron al cuadrado y se dividieron entre el número de réplicas para cada combinación; los cálculos se muestran a continuación:

$$SC_{ERROR} = 35822 - 35542 = 280$$

Esta forma de calcular el error permite obtener primero el cuadrado medio del error que se utilizará para el cálculo de las F-caculadas, lo cual agiliza la construcción de la tabla de ANOVA.

7. Los cuadrados medios.

Las siguientes fórmulas son necesarias para obtener los cuadrados medios, por ejemplo la fórmula $CM_A = \frac{SC_A}{a-1}$ es el cuadrado medio del factor A (en este caso el factor concentración); la fórmula $CM_B = \frac{SC_B}{b-1}$ es el cuadrado medio del factor B (se refiere al factor temperatura); $CM_{AB} = \frac{SC_{AB}}{(a-1)(b-1)}$ es la fórmula para el cuadrado medio de la interacción del factor A y el factor B (interacción temperatura-concentración); finalmente la fórmula $CM_{error} = \frac{SC_{error}}{ab(n-1)}$ representa el cuadrado medio del error. Nótese que en todas las fórmulas de los cuadrados medios es el resultado de la división de la suma de cuadrados del efecto de interés entre sus grados de libertad, de esta forma los resultados de los cuadrados medios de todos los efectos se muestran en seguida:

$$CM_A = \frac{616.5333}{2-1} = 616.53333; \qquad CM_B = \frac{591.20}{5-1} = 147.8;$$

$$CM_{AB} = \frac{196.13337}{(1)(4)} = 49.03333; \qquad CM_{error} = \frac{280}{(2)(5)(3-1)} = 14$$

8. Obtención de las F- calculadas (o de las Fo).

Para el efecto simple del factor concentración (factor A):

$$F_o = \frac{CM_A}{CM_{error}} = \frac{616.5333}{14} = 44.038$$

Para el efecto simple del factor temperatura (factor B):

$$F_o = \frac{CM_B}{CM_{error}} = \frac{147.8}{14} = 10.557$$

Para el efecto de la interacción concentración y temperatura (interacción AB):

$$F_o = \frac{CM_{AB}}{CM_{error}} = \frac{49.03333}{14} = 3.502$$

9. Obtención de la F(tablas).

De las F-calculadas y la tabla de la distribución F del apéndice A tenemos que hay para el efecto de concentración (factor A) hay un grado de libertad en el numerador [factor A] y 20 grados de libertad en el denominador [error], por lo que su valor de F-tablas para este efecto es de 4.35. Para el efecto de la temperatura (factor B) hay cuatro grados de libertad en el numerador y 20 en el denominador por lo que se obtiene una F-tablas de 2.87; el valor de la F-tablas para la interacción concentración y temperatura es 2.87 derivada de 4 grados de libertad en el numerador y 20 grados de libertad en el denominador.

10. Comparaciones de las F-calculadas y las F-tablas.

Para establecer que efectos son significativos es necesario comparar la F-calculada con la F-tabla mediante el siguiente criterio: Un efecto es significativo si la F-calculada es mayor que la F-tabla. $\left[F_{cal} > F\alpha\right]$.

En el caso del efecto simple de la concentración tenemos que su F-calculada=44.038 es mayor que la F-tabla=4.35, de esta forma decimos que la concentración si está influyendo en el poder de reflexión de un metal niquelado; si está influyendo el efecto simple de la temperatura debido a que la F-calculada=10.557 es mayor a la F-tabla=2.87; además si hay efecto de interacción de la concentración y la temperatura, ya que la F-calculada= 3.5020 es mayor que la F-tabla= 2.87.

11. Tabla de análisis de varianza (ANOVA).

Todos los cálculos anteriores se sintetizan en una tabla llamada tabla de ANOVA. Como se puede ver en la tabla de ANOVA todos los efectos son significativos para el poder de reflexión, con lo que se hace necesario realizar los análisis complementarios como son las pruebas de rangos múltiples y la gráfica de interacciones.

Fuente de variación	suma de cuadrados	grados de libertad	cuadrados medios	F-calculada	F-tabla
A:concentracion	616.533	1	616.533	44.04	4.35
B:temperatura	591.2	4	147.8	10.56	2.87
AB	196.133	4	49.0333	3.5	2.87
RESIDUAL	280	20	14		
TOTAL	1683.87	29			

Tabla 4.5 Tabla de ANOVA para poder de reflexión.

4.3.3 Prueba de mínima diferencia significativa LSD

Para realizar las pruebas de LSD se utilizan las siguientes fórmulas:

Factor	Media	LSD
A	$\overline{Y}_A = \frac{Y_{i..}}{bn}$	$LSD = t\left(\frac{\alpha}{2}, ab(n-1)\right)\sqrt{\frac{2CM_{ERROR}}{nb}}$
B	$\overline{Y}_B = \frac{Y_{.j.}}{an}$	$LSD = t\left(\frac{\alpha}{2,} ab(n-1)\right)\sqrt{\frac{2CM_{ERROR}}{na}}$

Donde:

$t\left(\frac{\alpha}{2}, ab(n-1)\right)$ es el valor de la t-student con un (1-α)% de confianza estadística y con ab(n-1) grados de libertad a.

a = número de niveles del factor A
b = número de niveles del factor B
n = número de réplicas
CM_{ERROR} es el cuadrado medio del error, de la tabla de ANOVA

4.3.3.1 Prueba de LSD para el efecto simple de la concentración (Factor A)

Para nuestro ejemplo, tenemos que:

$t\left(\frac{0.05}{2}, 20\right) = t(0.025, 20) = 2.086$ (ver tabla de t-student en el apéndice B).

CM_{ERROR}=14, b=5 y n=3

$$LSD = 2.086\sqrt{\frac{2(14)}{(3)(5)}} = 2.85$$

Las medias de los niveles del factor de concentración son

Concentración	Media
10	38.26
5	29.2

Comparando la media de la concentración 5 con la concentración 10, tenemos que:
| 29.2-38.26|=9.06> 2.85 por lo tanto la concentración de 10 es diferente a la concertación 5. En la tabla 4.6 podemos ver estos resultados y dado que los promedios son diferentes estadísticamente, concluimos que la concentración 10 da mayor poder de reflexión.

Concentración	Cantidad	Mean	Grupos homogéneos
5	15	29.2	X
10	15	38.2667	X
Contraste	diferencia	LSD	
5-10	*-9.06667	2.84997	

Tabla 4.6 LSD para la concentración.

4.3.3.2 Prueba de LSD para el efecto simple de la temperatura (Factor B)

Para el ejemplo tenemos que:

$t\left(\frac{0.05}{2}, 20\right) = t(0.025, 20) = 2.086$ (ver tabla de t-student, en el apéndice B).

CM_{ERROR}=14, a=2 y n=3.

$$LSD = 2.086\sqrt{\frac{2(14)}{(3)(2)}} = 4.5$$

Las medias de los niveles del factor temperatura son:

Temperatura	Media
75	39.1667
100	37.1667
125	33.8333
150	32.1667
175	26.3333

Comparando la media de la temperatura 75 con la temperatura 100, tenemos que | 39.16-37.16|=2< 4.5 por lo tanto no hay diferencias en las dos temperaturas.

Comparando la media de la temperatura 75 con la temperatura 125, tenemos que | 39.16-33.83|=5.33> 4.5 por lo tanto existen diferencias en las dos temperaturas.

Comparando la media de la temperatura 75 con la temperatura 150, tenemos que | 39.16-32.16|=7> 4.5 por lo tanto existen diferencias en las dos temperaturas.

Comparando la media de la temperatura 75 con la temperatura 175, tenemos que | 39.16-26.33|=12.83> 4.5 por lo tanto existen diferencias en las dos temperaturas.

Comparando la media de la temperatura 100 con la temperatura 125, tenemos que | 37.16-33.83|=3.33< 4.5 por lo tanto no hay diferencias en las dos temperaturas.

Comparando la media de la temperatura 100 con la temperatura 150, tenemos que | 37.16-32.16|=5> 4.5 por lo tanto existen diferencias en las dos temperaturas.

Comparando la media de la temperatura 100 con la temperatura 175, tenemos que | 37.16-26.33|=10.83> 4.5 por lo tanto existen diferencias en las dos temperaturas.

Comparando la media de la temperatura 125 con la temperatura 150, tenemos que | 33.83-32.16|=1.67< 4.5 por lo tanto no hay diferencias en las dos temperaturas.

Comparando la media de la temperatura 125 con la temperatura 175, tenemos que | 33.83-26.33|=7.5> 4.5 por lo tanto existen diferencias en las dos temperaturas.

Comparando la media de la temperatura 150 con la temperatura 175, tenemos que | 32.16-26.33|=5.83> 4.5 por lo tanto existen diferencias en las dos temperaturas.

Estos resultados se resumen en la siguiente tabla:

Contraste	Diferencia	LSD
75 – 100	2	4.50621
75 – 125	*5.33333	4.50621
75 – 150	*7.0	4.50621
75 – 175	*12.8333	4.50621
100 – 125	3.33333	4.50621
100 – 150	*5.0	4.50621
100 – 175	*10.8333	4.50621
125 – 150	1.66667	4.50621
125 – 175	*7.5	4.50621
150 – 175	*5.83333	4.50621

Tabla 4.7 LSD para temperatura.

Para decidir la mejor opción a utilizar se observará cuál nivel permite alcanzar el objetivo deseado [minimizar, maximizar o cumplir con una especificación para la variable de respuesta], enseguida se observará si forma parte de alguno de los grupos homogéneos para determinar si existe una o varias opciones.

Temperatura	Cantidad	Media	Grupos Homogéneos
175	6	26.3333	X
150	6	32.1667	X
125	6	33.8333	XX
100	6	37.1667	XX
75	6	39.1667	X

Tabla 4.8 Grupos homogeneos

Conclusión: Hay cuatro grupos homogéneos, un grupo lo forma la temperatura 175, otro grupo lo forman las temperaturas 125 y 150, otro grupo lo es 100 con 125, otro grupo homogéneo lo es las temperaturas 100 con 75.

Para nuestro problema como se quiere mayor poder de reflexión se observará para cuál temperatura la media es más alta, en este caso es la de 75; enseguida se observará si forma parte de alguno de los grupos homogéneos, [en este caso si del grupo de 75 y 100] por lo tanto, se recomiendan las temperaturas de 75 ó 100.

Aunque estadísticamente es lo mismo trabajar con cualquiera de las dos temperaturas se deben analizar todos los aspectos económicos, técnicos, ecológicos y de seguridad relacionados con el proceso para tomar una decisión final.

4.3.4 Graficas de interacción

Para obtener la gráfica de interacción es necesario calcular las medias de las combinaciones de los dos factores, con la siguiente fórmula:

$$\overline{Y}_{AB} = \frac{Y_{ij.}}{n}$$

Esta información se presenta en una gráfica xy. En el eje de las X's se grafican los niveles de cualquiera de los dos factores, en el eje de las Y's se grafica la variable de respuesta y en el interior de la gráfica se trazan las líneas correspondientes a cada uno de los niveles del otro factor.

Se considerará que existe interacción entre dos factores si el efecto de uno de ellos cambia para los diferentes niveles o categorías del otro factor; lo que se podrá observar en la gráfica de interacción al comparar las pendientes de las líneas obtenidas para cada nivel.

Recordemos que la pendiente de una recta se define como el cociente del incremento en y sobre el incremento en x, es decir, representa una razón de cambio entre las dos variables:

$$m = \frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}$$

En el diseño de experimento "y" es la variable de respuesta y "x" los factores por lo tanto lo que observamos gráficamente es si el cambio que se produce en la respuesta cuando se cambia de nivel para un factor "A" es igual o no para cada uno de los valores que asume el factor "B". Si el cambio es el mismo entonces las pendientes serán iguales, es decir, serán líneas paralelas y el resultado en el análisis de varianza será de que no hay interacción.

4.3.4.1 Gráfica de interacciones para la temperatura y la concentración

Para obtener la gráfica de interacciones de la temperatura y la concentración se calcularon las medias de las combinaciones de los dos factores, las cuales se muestran a continuación:

Temperatura	Concentración	
	5	10
75	36.6667	41.6667
100	34.6667	39.6667
125	31.3333	36.3333
150	23.6667	40.6667
175	19.6667	33

Esta información se presenta en una gráfica xy (figura 4.1).

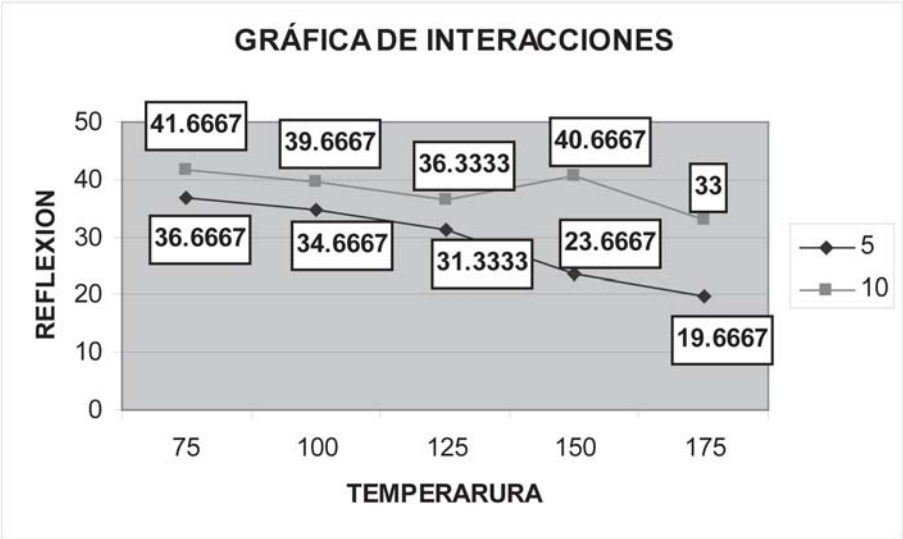


Figura 4.1 Gráfica de interacción de concentración y temperatura.

En este caso se encuentran los niveles de temperatura en el eje de las X's. En el eje de las Y's la reflexión. En el interior de la gráfica se trazan las líneas correspondientes a los niveles del otro factor, que en este caso corresponden a la concentración; la línea de abajo representa el nivel 5 de concentración, mientras que la línea de arriba representa el nivel 10 de concentración. Los puntos en la gráfica representan el promedio de cada combinación, por ejemplo el valor 36.6667 es el promedio de poder de reflexión al trabajar una temperatura de 75 con una concentración de 5, mientras que el valor de 41.6667 es el promedio del poder de reflexión al trabajar una temperatura de 75 con concentración 10. De igual forma el valor 34.6667 representa el trabajar una temperatura de 100 con concentración 5 y así sucesivamente los demás casos.

Una interpretación de la gráfica de interacciones es la siguiente: El nivel 10 de concentración siempre produce mayor poder de reflexión con respecto al nivel de concentración 5. Cuando se trabaja nivel 5 ó 10 de concentración y si se incrementa la temperatura entonces disminuye el poder de reflexión. Como se quiere mayor poder de reflexión se recomienda trabajar un nivel de concentración 10 con un nivel de temperatura de 75.

4.3.4 Conclusión del problema

1) Con base a la prueba de LSD de la concentración se recomienda usar el nivel 10.

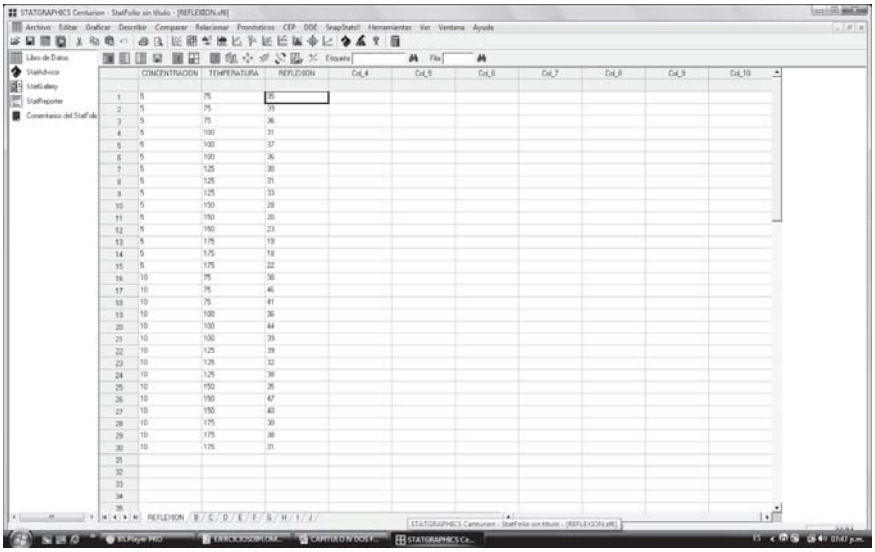
2) Con base a la prueba de LSD de la temperatura se recomienda usar la temperatura 75 ó 100.

3) Con base a la gráfica de interacciones se recomienda usar el nivel 10 de concentración con 75 de temperatura.

4) Con base a los resultados anteriores podemos concluir que el nivel de concentración 10 con temperatura 75 es la combinación ideal para incrementar el poder de reflexión.

4.4 Captura de datos y salida de resultados del ejemplo 4.1 usando el statgraphics centurion XV.

4.4.1 Captura de datos del ejemplo 4.1



4.4.2 Análisis de varianza

Análisis de Varianza para REFLEXION - Suma de Cuadrados Tipo III

Fuente de variación	Suma de Cuadrados	Gl	Cuadrado Medio	Razón-F	Valor-P
EFECTOS PRINCIPALES					
A:CONCENTRACION	616.533	1	616.533	44.04	0.0000
B:TEMPERATURA	591.2	4	147.8	10.56	0.0001
INTERACCIONES					
AB	196.133	4	49.0333	3.50	0.0253
RESIDUOS	280.0	20	14.0		
TOTAL (CORREGIDO)	1683.87	29			

Todas las razones-F se basan en el cuadrado medio del error residual

4.4.3 Pruebas de LSD

4.4.3.1 Prueba de LSD para el efecto de concentración

Método: 95.0 porcentaje LSD

CONCENTRACION	Casos	Media LS	Sigma LS	Grupos Homogéneos
5	15	29.2	0.966092	X
10	15	38.2667	0.966092	X

Contraste	Sig.	Diferencia	+/- Límites
5 - 10	*	-9.06667	2.84997

* indica una diferencia significativa.

4.4.3.2 Prueba de LSD para el efecto de concentración

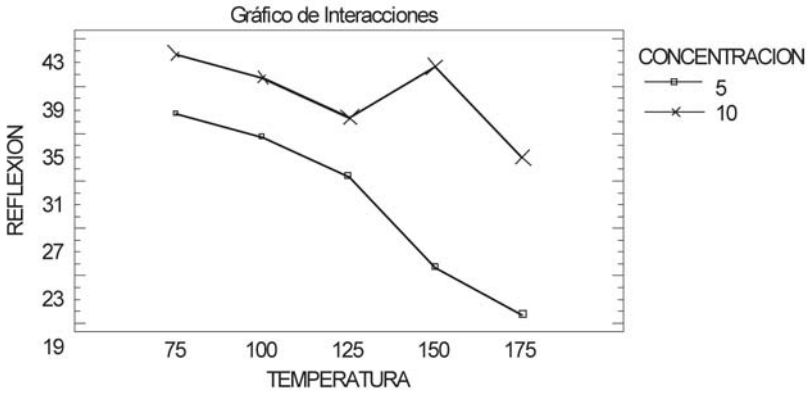
Método: 95.0 porcentaje LSD

TEMPERATURA	Casos	Media LS	Sigma LS	Grupos Homogéneos
175	6	26.3333	1.52753	X
150	6	32.1667	1.52753	X
125	6	33.8333	1.52753	XX
100	6	37.1667	1.52753	XX
75	6	39.1667	1.52753	X

Contraste	Sig.	Diferencia	+/- Límites
75 - 100		2.0	4.50621
75 - 125	*	5.33333	4.50621
75 - 150	*	7.0	4.50621
75 - 175	*	12.8333	4.50621
100 - 125		3.33333	4.50621
100 - 150	*	5.0	4.50621
100 - 175	*	10.8333	4.50621
125 - 150		1.66667	4.50621
125 - 175	*	7.5	4.50621
150 - 175	*	5.83333	4.50621

* indica una diferencia significativa.

4.4.4 Grafica de interacción entre la concentración y la temperatura



4.5 Ejercicios

Práctica 4.5.1. En una fábrica de aceites vegetales comestibles la calidad se ve afectada por la cantidad de impurezas dentro del aceite, ya que éstas causan oxidación, y esto repercute a su vez en las características de sabor y color del producto final. Los factores controlados que se cree que influyen más en la capacidad de adsorción de impurezas son la temperatura y el porcentaje de arcilla. Con el propósito de encontrar las condiciones óptimas de estos factores en cada lote se plantea la necesidad de realizar pruebas experimentales a nivel laboratorio. Así, teniendo como variable de respuesta el color del aceite, se realizó el siguiente experimento:

Temperatura (C)	Porcentaje de arcilla							
	0.8		0.9		1.0		1.1	
90	5.8	5.9	5.4	5.5	4.9	5.1	4.5	4.4
100	5.0	4.9	4.8	4.7	4.6	4.4	4.1	4.3
110	4.7	4.6	4.4	4.4	4.1	4.0	3.7	3.6

a) Realice un análisis de varianza de estos datos y obtenga conclusiones generales, use α=0.05.
b) Cuál es la relación general entre el color y los factores controlados.
c) Si el color aceptable mínimo es de 4.8, elija la mejor condición de temperatura y arcilla que la satisfaga y que reduzca costo.
d) Considerando que usualmente se utilizan 10 Kg de arcilla por tonelada de aceite, y cada kilogramo tiene un costo de $4. Con la condición propuesta en (c) cuál sería el ahorro diario y anual si se considera que por día se procesan 300 toneladas de aceite.

Práctica 4.5.2. Se encuentra en estudio el rendimiento de un proceso químico. Se cree que las dos variables más importantes son la presión y la temperatura. Se seleccionan tres niveles de cada factor y se realiza un experimento factorial con dos réplicas. Se recopilan los siguientes datos:

	Presión		
Temperatura	200	215	230
Baja	90.4	90.7	90.2
	90.2	90.6	90.4
Intermedia	90.1	90.5	89.9
	90.3	90.6	90.1
Alta	90.5	90.8	90.4
	90.7	90.9	90.1

(a) ¿Cuáles son los factores controlados y cuál la variable de respuesta?
(b) Anote el orden en que usted habría corrido cada una de las 18 pruebas.
(c) Enuncie el nombre del diseño experimental utilizado y formule las hipótesis que se pueden probar en este caso.
(d) Mediante el análisis estadístico apropiado pruebe las hipótesis que formuló antes, use α=0.05.
(e) Apoyándose en pruebas de rangos y la gráfica de interacciones encuentre las condiciones en que debe operarse el proceso.
(f) Prepare las gráficas apropiadas de residuos y verifique supuestos. ¿Las conclusiones que obtuvo antes se siguen manteniendo?

Práctica 4.5.3. Se están estudiando los factores que influyen en la resistencia de ruptura de una fibra sintética. Se eligen al azar cuatro máquinas y tres operadores y se realiza un experimento factorial usando fibras de un mismo lote de producción. Los resultados se muestran a continuación.

	Máquina			
Operario	A	B	C	D
1	109	110	108	110
	110	115	109	108
2	110	110	111	114
	112	111	109	112
3	116	112	114	120
	114	115	119	117

(a) Enuncie el nombre del diseño experimental y formule las hipótesis que se pueden probar.
(b) Pruebe las hipótesis anteriores y obtenga las conclusiones apropiadas, use α=0.05.
(c) Verifique el supuesto de varianza constante.

Practica 4.5.4. Es común añadir el elemento químico antimonio a la soldadura blanda de estaño-plomo como sustituto del estaño, que es más caro, a fin de reducir el costo de la soldadura blanda. Se llevó a cabo un experimento factorial con miras a determinar el efecto del antimonio sobre la resistencia de la unión soldada en blando con la soldadura de estaño-plomo (Journal, mayo de 1986). Se prepararon especímenes de soldadura estaño-plomo empleando uno de cuatro métodos de enfriamiento posibles (extinción con agua, WQ; extinción con de aceite, OQ; extinción con aire, AB, y enfriamiento en horno, FC) y agregando a la composición cantidades de antimonio (O%, 3%, 5% y 10%). Se asignaron aleatoriamente tres uniones soldadas en blando a cada uno de los 4 x 4 = 16 tratamientos y se midió la resistencia al corte de cada una. Los resultados experimentales aparecen en la siguiente tabla:

Cantidad de Antimonio % Peso	Método de Enfriamiento	Resistencia al corte Mpa		
		I	II	II
0	WQ	17.6	19.5	18.3
0	OQ	20	24.3	21.9
0	AB	18.3	19.8	22.9
0	FC	19.4	19.8	20.3
3	WQ	18.6	19.5	19
3	OQ	20	20.9	20.4
3	AB	21.7	22.9	22.1
3	FC	19	20.9	19.9
5	WQ	22.3	19.5	20.5
5	OQ	20.9	22.9	20.6
5	AB	22.9	19.7	21.6
5	FC	19.6	16.4	20.5
10	WQ	15.2	17.1	16.6
10	OQ	16.4	19	18.1
10	AB	15.8	17.3	17.1
10	FC	16.4	17.6	17.6

(a) Enuncie el nombre del diseño experimental y formule las hipótesis que se pueden probar.
(b) Pruebe las hipótesis anteriores y obtenga las conclusiones apropiadas, use α=0.05.
(c) Verifique el supuesto de varianza constante.

Practica 4.5.5. Se desea investigar el efecto del tipo y concentración del agente lubricante sobre la velocidad de disolución de tabletas de Metronidazol.

	Agente lubricante	
	Ac. Bórico	Talco
Concentración		
	202	164
1%	208	207
	176	146
	208	160

	123	179
2%	150	169
	162	191
	127	169

(a) Enuncie el nombre del diseño experimental y formule las hipótesis que se pueden probar.
(b) Pruebe las hipótesis anteriores y obtenga las conclusiones apropiadas, use α=0.05.
(c) Verifique el supuesto de varianza constante.

Practica 4.5.6. Se desea investigar el efecto del tipo y cantidad (%) de almidón sobre la friabilidad (%) de tabletas.

	Almidón (%)		
	26%	30%	40%
Tipo de almidón			
	0.7782	0.4272	0.7192
Almidón	0.7654	0.4336	0.6742
Pregelatinizado	0.7592	0.4552	0.6892
	0.7758	0.4771	0.7023
	0.7856	0.6273	0.9562
	0.8093	0.6592	0.9656
Almidón	0.8126	0.6692	0.9656
	0.8172	0.6523	0.9231
	0.8543	0.8023	1.1356
	0.8792	0.7986	1.1923
Dextrina	0.8723	0.7992	1.1643
	0.8993	0.7827	1.1732

(a) Enuncie el nombre del diseño experimental y formule las hipótesis que se pueden probar.
(b) Pruebe las hipótesis anteriores y obtenga las conclusiones apropiadas, use α=0.05.
(c) Verifique el supuesto de varianza constante.

Practica 4.5.7. Se desea investigar el efecto de la abertura de malla, tipo de suspensión y temperatura de ciclaje en el volumen de sedimentación (%) de una suspensión.

	Suspensión							
	A				B			
Abertura de Malla (M)	40		60		40		60	
Temperatura de ciclaje (T)								
	72	60	86	67	67	62	76	71
0 °C	75	70	73	68	68	65	80	80
	75	70	73	68	65	65	80	80

30 °C	55	55	52	52	44	48	60	67
	53	55	52	54	44	48	60	67
	53	55	57	54	45	45	60	65

(a) Enuncie el nombre del diseño experimental y formule las hipótesis que se pueden probar.
(b) Pruebe las hipótesis anteriores y obtenga las conclusiones apropiadas, use α=0.05.
(c) Verifique el supuesto de varianza constante.

Practica 4.5.8. Un investigador desea examinar tres dietas especiales en función de sus distintos efectos de reducción del nivel de colesterol. Además, desea examinar el efecto de un medicamento sobre el nivel del colesterol y, finalmente, está interesado en la presencia de posibles efectos de de interacción entre las dietas y los medicamentos. Por tanto, diseña un experimento factorial en el cual las tres dietas son los niveles de un factor y el medicamento y un placebo son los niveles del otro factor. Treinta varones adultos son asignados aleatoriamente en grupos de cinco a cada una de las combinaciones de los factores. Los sujetos fueron seleccionados con una variación limitada de edad para reducir el mínimo efecto de la edad sobre el nivel del colesterol. La cantidad de colesterol de todos los sujetos fue medida antes y después del tratamiento en gramos/100 ml de suero. Los datos aparecen en la siguiente tabla.

	Dietas					
	Dieta A		Dieta B		Dieta C	
	X_{AP}	X_{DP}	X_{AP}	X_{DP}	X_{AP}	X_{DP}
Placebo	180	145	190	150	190	150
	195	150	185	155	180	140
	205	160	200	150	190	160
	200	155	190	150	185	150
	195	150	185	140	185	150
Medicamento	195	140	190	140	205	160
	210	155	195	150	195	155
	195	140	190	140	205	160
	200	160	195	150	175	140
	180	140	190	155	185	140

(a) Enuncie el nombre del diseño experimental y formule las hipótesis que se pueden probar.
(b) Pruebe las hipótesis anteriores y obtenga las conclusiones apropiadas, use α=0.05.
(c) Verifique el supuesto de varianza constante.

Experimentos de tres factores

Capítulo V

Capítulo V

Experimentos de tres factores

5.1 Introducción

En algunas investigaciones científicas o en algunos procesos de manufactura, se hace necesario indagar la influencia de tres factores sobre una variable de respuesta, donde interesa analizar el efecto simple de los tres factores principales y los efectos de interacción derivados de estos factores. Como se mencionó anteriormente los diseños factoriales están constituidos por todas las posibles combinaciones de los niveles de los factores de interés. En este capítulo se estudiará mediante un ejemplo la forma de estimar el ANOVA y su interpretación; así como la obtención de la prueba de LSD para los efectos simples significativos, además de la construcción e interpretación de la gráfica de interacción.

5. 2 Ejemplo 5.1

En el departamento de control de calidad de una planta de acabado de telas se está estudiando el efecto de diversos factores sobre el teñido de tela de algodón y fibra sintética, la cual se utiliza en la manufactura de camisas para caballero. Se seleccionaron tres operadores, tres niveles de tiempo y dos niveles de temperatura, y se tiñeron tres pequeñas muestras de tela dentro de cada conjunto de condiciones. La tela teñida fue comparada con un estándar y se le asignó una calificación numérica. Los resultados aparecen a continuación.

Tiempo de ciclo (C)	Temperatura (A)					
	300			350		
	Operario (B)			Operario (B)		
	1	2	3	1	2	3
40	23	27	31	24	38	34
	24	28	32	23	36	36
	25	26	29	28	35	39
50	36	34	33	37	34	34
	35	38	34	39	38	36
	36	39	35	35	36	31
60	28	35	26	26	36	28
	24	35	27	29	37	26
	27	34	25	25	34	24

Tabla No. 5.1 Resultados del diseño.

Nombre del diseño: Diseño factorial 2 x 3 x 3

Modelo matemático:

$$Y_{ijkl} = \mu + \tau_i + \beta_j + \gamma_k + (\tau\beta)_{ij} + (\tau\gamma)_{ik} + (\beta\gamma)_{jk} + (\tau\beta\gamma)_{ijk} + \varepsilon_{ijkl}$$

Donde, Y_{ijkl} es la variable de respuesta (teñido de una tela), μ es la media general, τ_i es el efecto simple de la temperatura, β_j es el efecto simple del operario, γ_k es el efecto simple del tiempo de ciclo, $(\tau\beta)_{ij}$ el efecto de la interacción entre la temperatura y el operario, $(\tau\gamma)_{ik}$ efecto de interacción entre la temperatura y tiempo de ciclo, $(\beta\gamma)_{jk}$ efecto de interacción entre operario y tiempo de ciclo, $(\tau\beta\gamma)_{ijk}$ efecto de interacción entre la temperatura, el operario y el tiempo de ciclo, y ε_{ijkl} es el error aleatorio.

Planteamiento de las hipótesis:

1) Para el efecto simple de temperatura:

Nula:

$H_o : \tau_i = 0$ (no influye el efecto simple de la temperatura sobre el teñido de la tela).

Alternativa:

$H_a : \tau_i \neq 0$ (si influye el efecto simple de la temperatura en el teñido de la tela).

2) Para el efecto simple del operario:

Nula:

$H_o : \beta_j = 0$ (no hay efecto simple del operario sobre el teñido de la tela).

Alternativa:

$H_a : \beta_j \neq 0$ (si existe efecto simple del operario sobre el teñido de la tela).

3) Para el efecto simple del tiempo de ciclo:

Nula:

$H_o : \gamma_k = 0$ (el efecto simple del tiempo del ciclo no modifica el teñido de la tela).

Alternativa:

$H_a : \gamma_k \neq 0$ (el efecto simple del tiempo del ciclo si modifica el teñido de la tela).

4) Para el efecto de interacción entre temperatura y operario:

Nula:

$H_o : (\tau\beta)_{ij} = 0$ (no hay efecto de interacción entre la temperatura y el operario sobre el teñido de la tela).

Alternativa:

$H_a : (\tau\beta)_{ij} \neq 0$ (si hay efecto de interacción entre la temperatura y el operario sobre el teñido de la tela).

(hay o no efecto de interacción entre la temperatura y el operario).

5) Para el efecto de interacción entre temperatura y el tiempo de ciclo:
Nula:

$H_o : (\tau\gamma)_{ik} = 0$ (no hay efecto de interacción entre la temperatura y el tiempo de ciclo sobre el teñido de la tela).
Alternativa:
$H_a : (\tau\gamma)_{ik} \neq 0$ (si hay efecto de interacción entre la temperatura y el tiempo de ciclo sobre el teñido de la tela).

6) Para el efecto de interacción entre el operario y el tiempo de ciclo:
Nula:
$H_o : (\beta\gamma)_{jk} = 0$ (no hay efecto de interacción entre el operario y el tiempo de ciclo sobre el teñido de la tela).
Alternativa:
$H_a : (\beta\gamma)_{jk} \neq 0$ (si hay efecto de interacción entre el operario y el tiempo de ciclo sobre el teñido de la tela).

7) Para el efecto de interacción entre la temperatura, el operario y el tiempo de ciclo:
Nula:

$H_0 : (\tau\beta\gamma)_{ijk} = 0$ (no hay efecto de interacción entre la temperatura, el operario y el tiempo de ciclo sobre el teñido de la tela).
Alternativa:
$H_a : (\tau\beta\gamma)_{ijk} \neq 0$ (no hay efecto de interacción entre la temperatura, el operario y el tiempo de ciclo sobre el teñido de la tela).

5.3 Ecuaciones para la obtención del análisis de varianza

Para obtener el análisis de varianza, se requieren las siguientes fórmulas:

1) Tomar en cuenta que la descomposición de la variabilidad está dada mediante la siguiente ecuación:

$$SC_{TOTAL}=SC_A+SC_B+SC_C+SC_{AB}+SC_{AC}+SC_{BC}+SC_{ABC}+SC_{ERROR} \qquad (5.1)$$

2) La suma de cuadrados totales se calculará mediante la siguiente ecuación:

$$SC_{TOTAL}=\sum_{i=1}^{a}\sum_{j=1}^{b}\sum_{k=1}^{c}\sum_{l=1}^{n} y^2_{ijkl} - \frac{y^2_{....}}{abcn} \qquad (5.2)$$

3) La suma de cuadrados de los efectos simples de la temperatura, el operario y el tiempo de ciclo, será, respectivamente, mediante las siguientes ecuaciones

$$SC_A = \sum_{i=1}^{a} \frac{y^2_{i...}}{bcn} - \frac{y^2_{....}}{abcn} \qquad (5.3)$$

$$SC_B = \sum_{j=1}^{B} \frac{y^2_{.j...}}{acn} - \frac{y^2_{....}}{abcn} \qquad (5.4)$$

$$SC_C = \sum_{k=1}^{c} \frac{y^2_{...k.}}{abn} - \frac{y^2_{....}}{abcn} \qquad (5.5)$$

4) El cálculo de la suma de cuadrados para la interacción de la temperatura y el operario mediante la siguiente ecuación:

$$SC_{AB} = \sum_{i=1}^{a} \sum_{j=1}^{b} \frac{y^2_{ij..}}{cn} - \frac{y^2_{....}}{abcn} - SC_A - SC_B \qquad (5.6)$$

Donde, SC_A y SC_B son la suma de cuadrados de la temperatura y del operario respectivamente.

5) El cálculo de la suma de cuadrados para la interacción de la temperatura y el tiempo de ciclo se obtiene con la siguiente ecuación:

$$SC_{AC} = \sum_{i=1}^{a} \sum_{k=1}^{c} \frac{y^2_{i.k.}}{bn} - \frac{y^2_{....}}{abcn} - SC_A - SC_C \qquad (5.7)$$

Donde, SC_A y SC_C son la suma de cuadrados de la temperatura y el tiempo de ciclo respectivamente.

6) La ecuación para la obtención de la suma de cuadrados para la interacción del operario y el tiempo de ciclo es:

$$SC_{BC} = \sum_{j=1}^{b} \sum_{k=1}^{c} \frac{y^2_{ij..}}{an} - \frac{y^2_{....}}{abcn} - SC_B - SC_C \qquad (5.8)$$

Donde, SC_B y SC_C son la suma de cuadrados del operario y el tiempo de ciclo respectivamente.

7) Finalmente, la ecuación con que se obtendrá la suma de cuadrados para el efecto de interacción entre la temperatura, el operario y el tiempo de ciclo es:

$$SC_{ABC} = \sum_{i=1}^{a} \sum_{j=1}^{b} \sum_{k=1}^{c} \frac{y^2_{ijk.}}{n} - \frac{y^2_{....}}{abcn} - SC_A - SC_B - SC_C - SC_{AB} - SC_{AC} - SC_{BC} \qquad (5.9)$$

Donde, SC_A, SC_B, SC_C, SC_{AB}, SC_{AC}, SC_{BC} son la suma de cuadrados de la temperatura, el operario, el tiempo de ciclo, la interacción de temperatura y operario, la interacción de temperatura y tiempo de ciclo, y la interacción de operario y tiempo de ciclo, respectivamente.

8) La suma de cuadrados del error se estimará mediante la siguiente ecuación:

$$SC_{ERROR} = SC_{TOTAL} - (SC_A + SC_B + SC_C + SC_{AB} + SC_{AC} + SC_{BC} + SC_{ABC}) \qquad (5.10)$$

O bien, se puede usar la forma simplificada al igual que en los diseños de dos factores:

$$SC_{ERROR} = \sum_{i=1}^{a} \sum_{j=1}^{b} \sum_{k=1}^{c} \sum_{l=1}^{n} y^2_{ijkl} - \sum_{i=1}^{a} \sum_{j=1}^{b} \sum_{k=1}^{c} \frac{Y_{ijk.}^{\ 2}}{n} \qquad (5.11)$$

5.3.1 Obtención de la suma de cuadrados total

Primeramente nótese que en los datos del ejemplo, tenemos que a=2 (niveles del factor temperatura), b=3 (niveles del factor operario), c=3 (niveles del factor tiempo de ciclo), y n=3 (numero de réplicas en el diseño). Usando el primer término de la ecuación 5.2 para los resultados del diseño, encontramos la suma de los cuadrados de los datos.

$$\sum_{i=1}^{2} \sum_{j=1}^{3} \sum_{k=1}^{3} \sum_{l=1}^{3} y^2_{ijkl} = (23)^2 + (24)^2 + (25)^2 + (36)^2 + (35)^2 + \ldots + (24)^2 = 55128$$

Calculando el segundo término de la misma ecuación, obtenemos el resultado del cuadrado de la suma de los datos divida por el total de ellos.

$$\frac{y^2_{....}}{(2)(3)(3)(3)} = \frac{(23+24+25+36+35+36+\ldots+24)^2}{54} = \frac{(1704)^2}{54} = \frac{2903616}{54}$$

=53770.6666

Restando el segundo término al primero, se tiene que la suma de cuadrados totales es de 1357.334,

$$SC_{TOTAL} = 55128 - 53770.6666 = 1357.334$$

5.3.2 Suma de cuadrados del efecto simple de la temperatura (FACTOR A)

Si se considera de la tabla 5.1 los resultados obtenidos al utilizar solamente el factor de la temperatura obtenemos la tabla 5.2, misma en que se calculan los subtotales de cada nivel del factor.

Temperatura					
300			350		
23	27	31	24	38	34
24	28	32	23	36	36
25	26	29	28	35	39
36	34	33	37	34	34
35	38	34	39	38	36
36	39	35	35	36	31
28	35	26	26	36	28
24	35	27	29	37	26
27	34	25	25	34	24
SUBTOTAL		826	SUBTOTAL		878

Tabla No. 5.2. Totales de cada nivel de temperatura.

Haciendo uso de la ecuación 5.3 y tomando los subtotales de la tabla 5.2 y sabiendo que a=2, b=3, c=3 y n=3, encontramos que la suma de cuadrados del factor de la temperatura es de 50.074, como se muestra a continuación:

$$\sum_{i=1}^{2} \frac{y^2_{i\ldots}}{(3)(3)(3)} = \frac{(826)^2 + (878)^2}{27} = \frac{1453160}{27} = 53820.74; \qquad \frac{y^2_{\ldots}}{(2)(3)(3)(3)} = 53770.6666$$

$$SC_A = 53820.74 - 53770.6666 = 50.074$$

5.3.3 Suma de cuadrados para operario (FACTOR B)

En la tabla 5.3 están los datos considerando solo el factor operario, en la cual se calculan los subtotales de cada nivel del factor.

	Operario			Operario		
	1	2	3	1	2	3
	23	27	31	24	38	34
	24	28	32	23	36	36
	25	26	29	28	35	39
	36	34	33	37	34	34
	35	38	34	39	38	36
	36	39	35	35	36	31
	28	35	26	26	36	28
	24	35	27	29	37	26
	27	34	25	25	34	24
Subtotales	**258**	**296**	**272**	**266**	**324**	**288**

Tabla No. 5.3 Subtotales de cada nivel del factor operario.

Sumando los subtotales de cada nivel de operario se obtiene los totales de cada nivel de dicho factor (ver tabla 5.4).

	Operario		
	1	2	3
Totales	524	620	560

Tabla No.5.4 Totales de los niveles de operario.

Con la ecuación 5.4 y los totales de la tabla 5.4 y a=2, b=3, c=3 y n=3, encontramos que la suma de cuadrados del factor de operario es de 261.334, la cual se obtuvo así:

$$\sum_{j=1}^{3} \frac{y^2_{.j..}}{(2)(3)(3)} = \frac{(524)^2 + (620)^2 + (560)^2}{18} = \frac{972576}{18} = 54032$$

$$\frac{y^2_{....}}{(2)(3)(3)(3)} = 53770.6666$$

$$SC_B = 54032 - 53770.6666 = 261.334$$

5.3.4 Suma de cuadrados para el tiempo de ciclo (FACTOR C)

Para el cálculo de la suma de cuadrados del factor tiempo de ciclo utilizaremos la tabla 5.5.

Tiempo de ciclo							Subtotales
40	23	27	31	24	38	34	
	24	28	32	23	36	36	
	25	26	29	28	35	39	**538**
50	36	34	33	37	34	34	
	35	38	34	39	38	36	
	36	39	35	35	36	31	**640**
60	28	35	26	26	36	28	
	24	35	27	29	37	26	
	27	34	25	25	34	24	**526**

Tabla No. 5.5 Subtotales del experimento considerando solo el tiempo de ciclo.

Por lo que los totales de cada nivel de este factor se muestran en la tabla 5.6.

Tiempo de ciclo	Totales
40	538
50	640
60	526

Tabla 5.6. Totales de los niveles de tiempo de ciclo.

Con la ecuación 5.5 y los totales de la tabla 5.6 y los valores a = 2, b = 3, c = 3 y n = 3, encontramos que la suma de cuadrados del factor del tiempo de ciclo es 436, cuyo valor se encontró así:

$$\frac{\sum_{K=1} y_{..k.}^2}{(2)(3)(3)} = \frac{(538)^2 + (640)^2 + (526)^2}{18} = \frac{975720}{18} = 54206.6666$$

$$\frac{y_{....}^2}{(2)(3)(3)(3)} = 53770.6666$$

$$SC_C = 54206.6666 - 53770.6666 = 436$$

5.3.5 Suma de cuadrados para la interacción AB (INTERACCIÓN DE TEMPERATURA CON EL OPERARIO)

Para el cálculo de la interacción, es necesario obtener la tabla No. 5.7, donde se obtienen los subtotales de las combinaciones de los niveles de la temperatura y operario.

	Temperatura					
	300			350		
	Operario			Operario		
	1	2	3	1	2	3
	23	27	31	24	38	34
	24	28	32	23	36	36
	25	26	29	28	35	39
SUBTOTALES	72	81	92	75	109	109
	36	34	33	37	34	34
	35	38	34	39	38	36
	36	39	35	35	36	31
SUBTOTALES	107	111	102	111	108	101
	28	35	26	26	36	28
	24	35	27	29	37	26
	27	34	25	25	34	24
SUBTOTALES	79	104	78	80	107	78
TOTALES	258	296	272	266	324	288

Tabla 5.7. Subtotales de la interacción de temperatura y operario.

Los resultados de la tabla 5.7 se pueden sintetizar en la tabla 5.8.

Temperatura	Operario		
	1	2	3
300	258	296	272
350	266	324	288

Tabla 5.8. Totales de las combinaciones de temperatura y operario.

De la ecuación 5.6 y los totales de la tabla 5.8 y los valores ya conocidos a=2, b=3, c=3 y n=3, encontramos que la suma de cuadrados para la interacción de temperatura y operario es 11.2587, el cual se calculó así:

$$\sum_{i=1}^{2}\sum_{j=1}^{3}\frac{y^2_{ij..}}{(3)(3)}=\frac{(258)^2+(296)^2+(272)^2+(266)^2+(324)^2+(288)^2}{9}=54093.3333$$

$$\frac{y^2_{....}}{(2)(3)(3)(3)}=53770.6666;\quad SC_A=50.074;\quad SC_B=261.334$$

$$SC_{AB}=54093.3333-53770.6666-50.074-261.334=11.2587$$

5.3.6 Suma de cuadrados de la interacción AC (INTERACCIÓN DE TEMPERATURA Y TIEMPO DE CICLO)

Para el cálculo de esta interacción, es necesario obtener la tabla 5.9, donde se obtienen los subtotales de las combinaciones de los niveles de la temperatura y tiempo de ciclo.

	Temperatura					
Tiempo de ciclo	300			350		
40	23	27	31	24	38	34
	24	28	32	23	36	36
	25	26	29	28	35	39
	Subtotal	245		Subtotal	293	
50	36	34	33	37	34	34
	35	38	34	39	38	36
	36	39	35	35	36	31
	Subtotal	320		Subtotal	320	
60	28	35	26	26	36	28
	24	35	27	29	37	26
	27	34	25	25	34	24
	Subtotal	261		Subtotal	265	

Tabla 5.9. Subtotales de la interacción de temperatura y operario.

Con los subtotales de la tabla 5.9, encontramos los totales de las combinaciones de los factores tiempo de ciclo y temperatura, ver tabla 5.10.

Tiempo de ciclo	Temperatura	
	300	350
40	245	293
50	320	320
60	261	265

Tabla 5.10. Totales de las combinaciones de temperatura y tiempo de ciclo.

Ahora, usando la ecuación 5.7, los totales de la tabla 5.10 y los valores a=2, b=3, c=3 y n=3, tenemos que la suma de cuadrados de la interacción de la temperatura y el tiempo de ciclo es de 78.816, misma que se obtuvo así:

$$SC_{AC} = \sum_{i=1}^{a} \sum_{k=1}^{c} \frac{y^2_{i.k.}}{bn} - \frac{y^2_{....}}{abcn} - SC_A - SC_C$$

$$\sum_{i=1}^{2} \sum_{k=1}^{3} \frac{y^2_{i.k.}}{(3)(3)} - \frac{(245)^2 + (320)^2 + (261)^2 + (293)^2 + (320)^2 + (265)^2}{9} = 54335.5556$$

$$\frac{y^2_{....}}{(2)(3)(3)(3)} = 53770.6666; \quad SC_A = 50.074; \quad SC_C = 436$$

$$SC_{AC}=54335.556 - 53770.666 - 50.074-436=78.816$$

5.3.7 Suma de cuadrados para la interacción BC (INTERACCIÓN DE OPERARIO-TIEMPO DE CICLO)

Para los cálculos de la suma de cuadrados de la interacción de operario y tiempo de ciclo es necesario tener la tabla 5.11, donde se muestran los subtotales de las réplicas en cada combinación de ambos factores.

Tiempo de Ciclo	Operario			Operario		
	1	2	3	1	2	3
40	23	27	31	24	38	34
	24	28	32	23	36	36
	25	26	29	28	35	39
	72	81	92	75	109	109
50	36	34	33	37	34	34
	35	38	34	39	38	36
	36	39	35	35	36	31
	107	111	102	111	108	101
60	28	35	26	26	36	28
	24	35	27	29	37	26
	27	34	25	25	34	24
	79	104	78	80	107	78

Tabla 5.11. Subtotales de la interacción de tiempo de ciclo y operario.

Los subtotales de la tabla 5.11 nos lleva a encontrar los totales de las combinaciones de los factores tiempo de ciclo y operario, ver tabla 5.12.

Tiempo de Ciclo	Operario		
	1	2	3
40	147	190	201
50	218	219	203
60	159	211	156

Tabla 5.12. Totales de las combinaciones de tiempo de ciclo y operario.

Mediante la ecuación 5.8, la tabla 5.12 y los valores a=2, b=3, c=3 y n=3, tenemos que la suma de cuadrados de la interacción del tiempo de ciclo y operario es de 355.6661, valor que se obtuvo así:

$$\sum_{j=1}^{3}\sum_{k=1}^{3}\frac{y^2_{ij..}}{(2)(3)}=\frac{(147)^2+(190)^2+(201)^2+(218)^2+(219)^2+(203)^2+(159)^2+(211)^2+(156)^2}{6}$$

$$\sum_{j=1}^{3}\sum_{k=1}^{3}\frac{y^2_{ij..}}{(2)(3)}=54823.6667$$

$$\frac{y^2_{....}}{(2)(3)(3)(3)}=53770.6666;\qquad SC_B=261.334;\qquad SC_C=436$$

$$SC_{BC}=54823.6667-53770.6666-261.334-436=355.6661$$

5.3.8 Sumas de cuadrados para la interacción ABC (INTERACCIÓN DE TEMPERATURA-OPERARIO-TIEMPO DE CICLO)

Para la suma de cuadrados de la interacción triple, se recomienda calcular los subtotales de las réplicas de cada combinación, como se muestra en la tabla 5.13.

Tiempo de Ciclo	Temperatura					
	300			350		
	Operario			Operario		
	1	2	3	1	2	3
	23	27	31	24	38	34
40	24	28	32	23	36	36
	25	26	29	28	35	39
	72	81	92	75	109	109
	36	34	33	37	34	34
50	35	38	34	39	38	36
	36	39	35	35	36	31
	107	111	102	111	108	101
	28	35	26	26	36	28
60	24	35	27	29	37	26
	27	34	25	25	34	24
	79	104	78	80	107	78

Tabla 5.13. Subtotales de las réplicas de cada combinación de los factores temperatura, operario y tiempo de ciclo.

Con la ecuación 5.9, la tabla 5.13 y los valores a=2, b=3, c=3 y n=3, tenemos que la suma de cuadrados de la interacción de la temperatura, el operario y tiempo de ciclo, es de 46.1846, cuyo valor se calculó así:

$$\sum_{i=1}^{2}\sum_{j=1}^{3}\sum_{k=1}^{3}\frac{y^2_{ijk.}}{3}=$$

$$\frac{(72)^2+(107)^2+(79)^2+(81)^2+(111)^2+(104)^2+(92)^2+(102)^2+(78)^2+(75)^2+(111)^2+(80)^2+(109)^2+(108)^2+(107)^2+(109)^2+(101)^2+(78)^2}{3}$$

$$=55010$$

$\frac{y^2_{...}}{(2)(3)(3)(3)}$ =53770.6666; SC_A=50.074; SC_B=261.334; SC_C =436; SC_{AB}=11.2587; SC_{AC}=78.816;

SC_{BC}=355.6661

SC_{ABC}=55010 − 53770.6666 − 50.074 − 261.334 − 436-11.2587 − 78.816 − 355.6661=46.1846

5.3.9 Sumas de cuadrados del error

Mediante la ecuación 5.10 encontramos que la suma de cuadrados del error se obtiene restándole a la suma de cuadrados totales la suma de cuadrados de los efectos anteriores, como se muestra a continuación:

$$SC_{ERROR}=SC_{TOTAL} - (SC_A+SC_B+SC_C+SC_{AB}+SC_{AC}+SC_{BC}+SCS_{ABC})$$

$$SC_{ERROR}=1357.33 - 1239.33 = 118.$$

O bien mediante la ecuación 5.11 nos quedaría

$$SC_{ERROR} = \sum_{i=1}^{a}\sum_{j=1}^{b}\sum_{k=1}^{c}\sum_{l=1}^{n} y^2_{ijkl} - \sum_{i=1}^{a}\sum_{j=l}^{b}\sum_{k=1}^{c}\frac{Y_{ijk.}^{\ 2}}{n}$$

$$SC_{ERROR}= 55128 - 55010 = 118$$

5.3.10 Los cuadrados medios

Como se vio en el capítulo 4, los cuadrados medios son el resultado de la división entre la suma de cuadrados del efecto entre sus grados de libertad. En un diseño de tres factores hay siete efectos por estudiar por lo que las fórmulas necesarias para obtener los cuadrados medios, son:

$CM_A = \frac{SC_A}{a-1}$ es el cuadrado medio del factor A (en este caso el factor temperatura); la fórmula $CM_B = \frac{SC_B}{b-1}$ es el cuadrado medio del factor B (se refiere al factor operario); $CM_C = \frac{SC_C}{c-1}$ es el cuadrado medio del factor C (factor tiempo de ciclo); $CM_{AB} = \frac{SC_{AB}}{(a-1)(b-1)}$ es la fórmula para el cuadrado medio de la interacción del factor A y el factor B (interacción temperatura-operario); la fórmula $CM_{AC} = \frac{SC_{AC}}{(a-1)(c-1)}$ corresponde al cuadrado medio de la interacción del factor A con el factor C (interacción temperatura-tiempo de ciclo); $CM_{BC} = \frac{SC_{BC}}{(b-1)(c-1)}$ es la fórmula del cuadrado medio de la interacción del factor B con el factor C (interacción operario-tiempo de ciclo); $CM_{ABC} = \frac{SC_{ABC}}{(a-1)(b-1)(c-1)}$ es la fórmula para el cálculo del cuadrado medio de la interacción

triple del factor A con el factor B y el factor C (interacción entre la temperatura-operario-tiempo de ciclo); finalmente la fórmula $CM_{error} = \frac{SC_{error}}{abc(n-1)}$ representa el cuadrado medio del error. Los resultados de los cuadrados medios de todos los efectos obtenidos de esta forma se muestran en seguida:

$$CM_A = \frac{50.074}{2-1} = 50.074; \quad CM_B = \frac{261.334}{3-1} = 130.667;$$
$$CM_C = \frac{436}{3-1} = 218; \quad CM_{AB} = \frac{11.25}{(1)(2)} = 5.62; \quad CM_{AC} = \frac{78.816}{(1)(2)} = 39.408$$
$$CM_{BC} = \frac{355.66}{(2)(2)} = 88.915; \quad CM_{ABC} = \frac{46.180}{(1)(2)(2)} = 11.545;$$
$$CM_{error} = \frac{118}{(2)(3)(3)(3-1)} = 3.27$$

5.3.11 Obtención de las F-calculadas o Fo.

Para el efecto simple del factor temperatura (factor A):

$$F_0 = \frac{CM_A}{CM_{error}} = \frac{50.074}{3.27} = 15.28$$

Para el efecto simple del factor operario (factor B):

$$F_0 = \frac{CM_B}{CM_{error}} = \frac{130.66}{3.27} = 39.86$$

Para el efecto simple del factor tiempo de ciclo (factor C):

$$F_0 = \frac{CM_C}{CM_{error}} = \frac{218}{3.27} = 66.51$$

Para el efecto de la interacción temperatura y operario (interacción AB):

$$F_o = \frac{CM_{AB}}{CM_{error}} = \frac{5.62}{3.27} = 1.72$$

Para el efecto de la interacción temperatura y tiempo de ciclo (interacción AC):

$$F_o = \frac{CM_{AC}}{CM_{error}} = \frac{39.40}{3.27} = 12.02$$

Para el efecto de la interacción operario y tiempo de ciclo (interacción BC):

$$F_o = \frac{CM_{BC}}{CM_{error}} = \frac{88.91}{3.27} = 27.13$$

Para el efecto de la interacción temperatura, operario y tiempo de ciclo (interacción ABC):

$$F_o = \frac{CM_{ABC}}{CM_{error}} = \frac{11.54}{3.27} = 3.52$$

5.3.12 Obtención de la F(tablas)

De las F-calculadas y la tablas del apéndice A, tenemos que la F-tablas son las siguientes:

Para el efecto simple del factor temperatura (factor A):

$F(\alpha=0.05,1,36)=4.10$

Para el efecto simple del factor operario (factor B):

$F(\alpha=0.05,2,36)=3.25$

Para el efecto simple del factor tiempo de ciclo (factor C):

$F(\alpha=0.05,2,36)=3.25$

Para el efecto de la interacción temperatura y operario (interacción AB):

$F(\alpha=0.05,2,36)=3.25$

Para el efecto de la interacción temperatura y tiempo de ciclo (interacción AC):

$F(\alpha=0.05,2,36)=3.25$

Para el efecto de la interacción operario y tiempo de ciclo (interacción BC):

$F(\alpha=0.05,4,36)=2.65$

Para el efecto de la interacción temperatura, operario y tiempo de ciclo (interacción ABC):

$F(\alpha=0.05,4,36)=2.65$

5.3.13 Comparaciones de la F-calculada y la F-tablas.

Si $F_{cal} > F\alpha$ se rechaza la hipótesis nula.

Para el efecto simple del factor temperatura (factor A):

$F_{calculada}$=15.28 > F_{tablas}=4.10, por consiguiente si influye la temperatura en el teñido de una tela.

Para el efecto simple del factor operario (factor B):

$F_{calculada}$=39.86>F_{tablas}=3.25, por consiguiente si hay efecto del operario en el teñido de una tela.

Para el efecto simple del factor tiempo de ciclo (factor C):

$F_{calculada}$=66.51>F_{tablas}=3.25, por consiguiente el tiempo de ciclo si modifica el teñido de una tela.

Para el efecto de la interacción temperatura y operario (interacción AB):

$F_{calculada}$=1.72<F_{tablas}=3.25, por lo tanto no hay efecto de interacción entre la temperatura y el operario.

Para el efecto de la interacción temperatura y tiempo de ciclo (interacción AC):

$F_{calculada}$=12.02>F_{tablas}=3.25, por lo tanto si hay efecto de interacción entre la temperatura y el tiempo de ciclo.

Para el efecto de la interacción operario y tiempo de ciclo (interacción BC):

$F_{calculada}$=27.13>F_{tablas}=2.65, por lo tanto si hay efecto de interacción entre el operario y el tiempo de ciclo.

Para el efecto de la interacción temperatura, operario y tiempo de ciclo (interacción ABC):

$F_{calculada}$=3.52>F_{tablas}=2.65, por lo tanto si hay efecto de interacción entre la temperatura y el operario y tiempo de ciclo.

Los resultados anteriores se sintetizan en la siguiente tabla 5.14:

Fuente	SS	GL	CM	F(calculada)	F(tablas)
A:Temperatura	50.074	2-1=1	50.074/1=50.074	50.074/3.27=15.28	4.1
B:Operario	261.33	3-1=2	261.33/2=130.66	130.66/3.27=39.86	3.25
C: Tiempo de Ciclo	436	3-1=2	436/2=218.00	218/3.27=66.51	3.2
AB	11.25	(1)(2)=2	11.25/2=5.62	5.62/3.27=1.72	3.25
AC	78.816	(1)(2)=2	78.861/2=39.4	39.4/3.27=12.02	3.25
BC	355.66	(2)(2)=4	355.66/4=88.91	88.91/3.27=27.13	2.65
ABC	46.18	(1)(2)(2)=4	46.18/4=11.54	11.54/3.27=3.52	2.65
ERROR	118	(2)(3)(3)(3-1)=36	118/36=3.27		
TOTAL	1357.33	54-1=53			

Tabla 5.14. Tabla del análisis de varianza (ANOVA).

5.3.14 Interpretación del ANOVA:

Son significativos los efectos del factor temperatura, del factor operario y del tiempo de ciclo. También son significativas las interacciones temperatura-tiempo de ciclo y la interacción de operario-tiempo de ciclo, así como la interacción triple temperatura-operario-tiempo de ciclo.

5.4 Prueba de mínima diferencia significativa LSD

Dado que los 3 efectos simples, de la temperatura, el operario y el tiempo de ciclo son significativos, es necesario realizar una prueba LSD para cada uno de ellos, con el propósito de analizar las diferencias de los niveles en cada efecto.

Ahora en este caso se utilizaran las siguientes fórmulas:

Factor	Media	LSD
A	$\overline{Y}_A = \frac{Y_{i...}}{bcn}$	$LSD = t\left(\alpha/2, abc\left(n-1\right)\right)\sqrt{\frac{2CM_{ERROR}}{bcn}}$
B	$\overline{Y}_B = \frac{Y_{.j..}}{acn}$	$LSD = t\left(\alpha/2, abc\left(n-1\right)\right)\sqrt{\frac{2CM_{ERROR}}{acn}}$
C	$\overline{Y}_B = \frac{Y_{..k.}}{abn}$	$LSD = t\left(\alpha/2, abc\left(n-1\right)\right)\sqrt{\frac{2CM_{ERROR}}{abn}}$

Donde:

$t\left(\alpha/2, abc\left(n-1\right)\right)$ es el valor de la t-student (apéndice B) con un $(1-\alpha)\%$ de confianza estadística y con abc(n − 1) grados de libertad

a = número de niveles del factor A
b = número de niveles del factor B
n = número de réplicas
CM_{ERROR} es el cuadrado medio del error, de la tabla de ANOVA

5.4.1 Prueba LSD para temperatura

Temperatura	Casos	Media	Grupos Homogéneos
300	27	30.5926	X
350	27	32.5185	X

Contraste	Sig.	Diferencia	+/- Límites
300 - 350	*	-1.92593	0.999337

Como se quiere mayor teñido de la tela conviene usar la temperatura de 350.

5.4.2 Prueba LSD para operario

Operario	Casos	Media	Grupos Homogéneos
1	18	29.1111	X
3	18	31.1111	X
2	18	34.4444	X

Contraste	Sig.	Diferencia	+/- Límites
1 - 2	*	-5.33333	1.22393
1 - 3	*	-2.0	1.22393
2 - 3	*	3.33333	1.22393

El operario 2 es mejor que los otros, pues con él se obtiene en promedio 34.44 de teñido de tela.

5.4.3 Prueba LSD para tiempo de ciclo

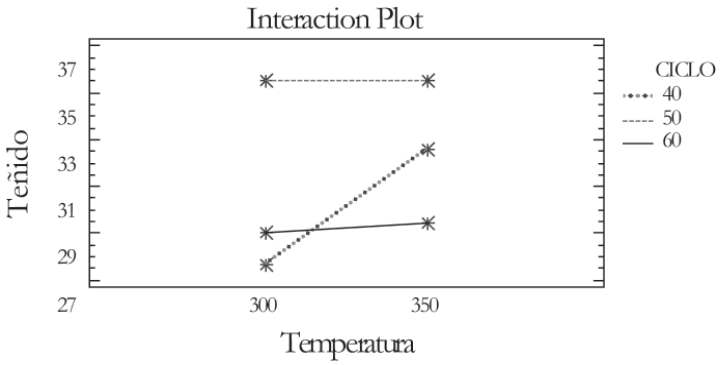
Tiempo de ciclo	Casos	Media	Grupos Homogéneos
60	18	29.2222	X
40	18	29.8889	X
50	18	35.5556	X

Contraste	Sig.	Diferencia	+/- Límites
40 - 50	*	-5.66667	1.22393
40 - 60		0.666667	1.22393
50 - 60	*	6.33333	1.22393

Con un tiempo de ciclo de 50 se obtiene mayor teñido.

5.5 Gráficas de interacciones

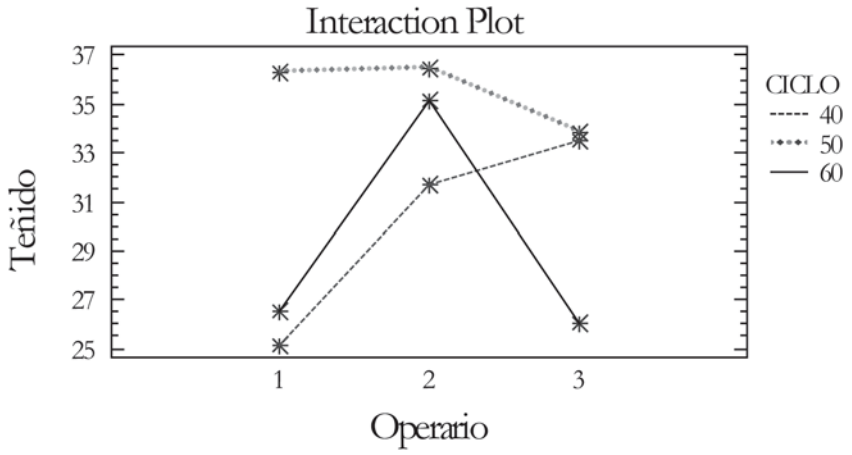
Gráfica de interacción temperatura-ciclo.



Cuando el tiempo de ciclo es de 50 se obtiene el mismo valor de teñido para ambas temperaturas, por lo que se puede trabajar con cualquiera de estas dos opciones, la temperatura en 300 y el tiempo de ciclo en 50, o también la temperatura en 350 y el tiempo de ciclo en

50. Sin embargo; es pertinente analizar los aspectos técnicos, económicos y de seguridad para el proceso que ayuden a decidir las condiciones que permitan un proceso más rentable.

Gráfica de interacción operario-tiempo de ciclo.



Se puede trabajar el operario 1 con tiempo de ciclo 50, o también el operario 2 con tiempo de ciclo 50.

5.6 Conclusión

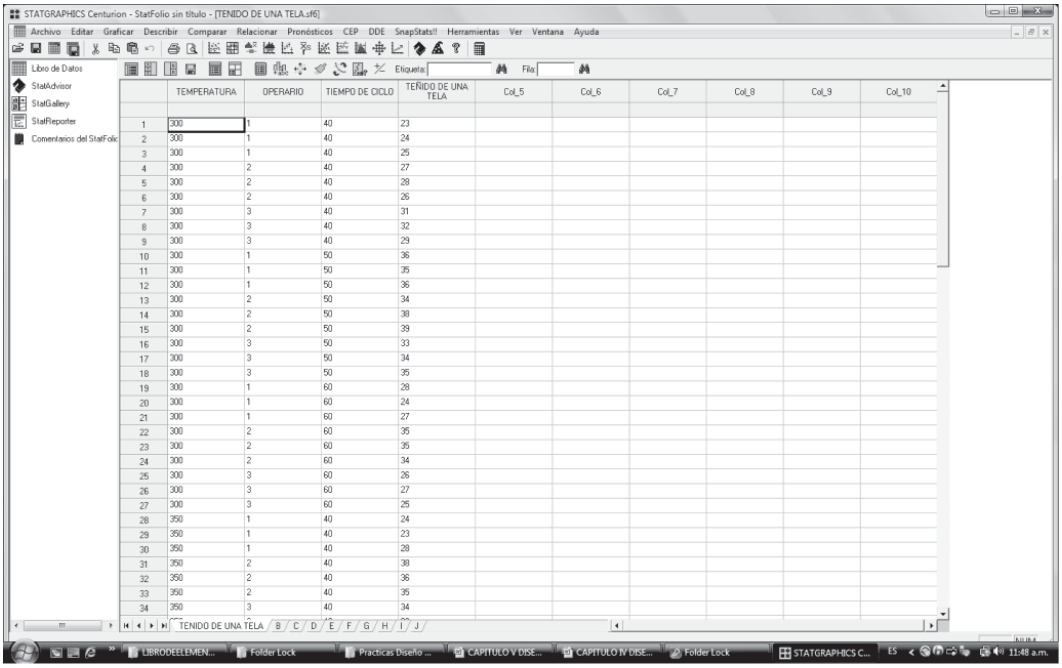
Con base a los resultados parciales anteriores, se concluye que la combinación recomendada sería:

Temperatura=300, Operario=2, Tiempo de ciclo=50

Ya que con esta se gastaría menos energía al usar menos temperatura, además se reducen los riesgos por contaminación y seguridad en el proceso.

5.7 Captura de datos y salida de resultados del ejemplo 5.1 usando el Statgraphics centurion XV

5.7.1 Captura de datos del ejemplo 5.1



5.7.2 Análisis de varianza

Fuente de variación	Suma de Cuadrados	Gl	Cuadrado Medio	Razón-F	Valor-P
Efectos principales					
A:Operario	261.333	2	130.667	39.86	0.0000
B:Temperatura	50.0741	1	50.0741	15.28	0.0004
C:Tiempo de ciclo	436.0	2	218.0	66.51	0.0000
Interacciones					
AB	11.2593	2	5.62963	1.72	0.1939
AC	355.667	4	88.9167	27.13	0.0000
BC	78.8148	2	39.4074	12.02	0.0001
ABC	46.1852	4	11.5463	3.52	0.0159
Residuos	118.0	36	3.27778		
Total (corregido)	1357.33	53			

5.7.3 Pruebas de LSD

5.7.3.1 Prueba de LSD para el efecto de operario

Método: 95.0 porcentaje LSD

Operario	Casos	Media LS	Sigma LS	Grupos Homogéneos
1	18	29.1111	0.42673	X
3	18	31.1111	0.42673	X
2	18	34.4444	0.42673	X

Contraste	Sig.	Diferencia	+/- Límites
1 - 2	*	-5.33333	1.22393
1 - 3	*	-2.0	1.22393
2 - 3	*	3.33333	1.22393

* indica una diferencia significativa.

5.7.3.2 Prueba de LSD para el efecto de operario

Método: 95.0 porcentaje LSD

Temperatura	Casos	Media LS	Sigma LS	Grupos Homogéneos
300	27	30.5926	0.348424	X
350	27	32.5185	0.348424	X

Contraste	Sig.	Diferencia	+/- Límites
300 - 350	*	-1.92593	0.999337

* indica una diferencia significativa.

5.7.3.3 Prueba de LSD para el efecto de tiempo de ciclo

Método: 95.0 porcentaje LSD

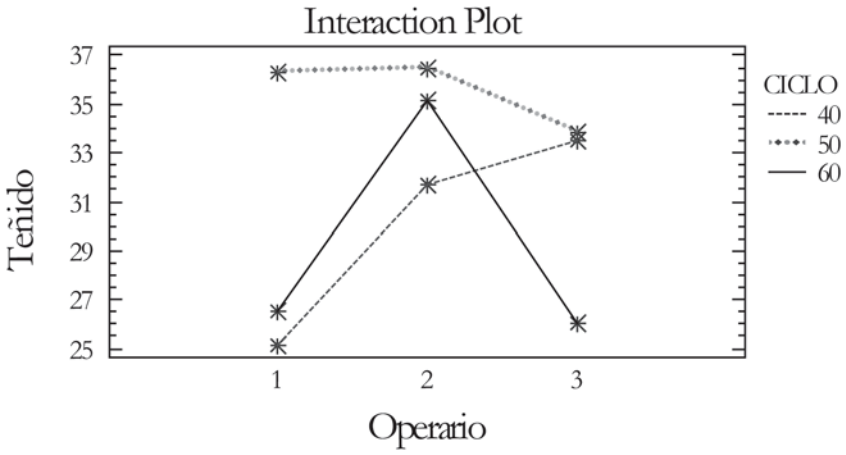
Tiempo de ciclo	Casos	Media LS	Sigma LS	Grupos Homogéneos
60	18	29.2222	0.42673	X
40	18	29.8889	0.42673	X
50	18	35.5556	0.42673	X

Contraste	Sig.	Diferencia	+/- Límites
40 - 50	*	-5.66667	1.22393
40 - 60		0.666667	1.22393
50 - 60	*	6.33333	1.22393

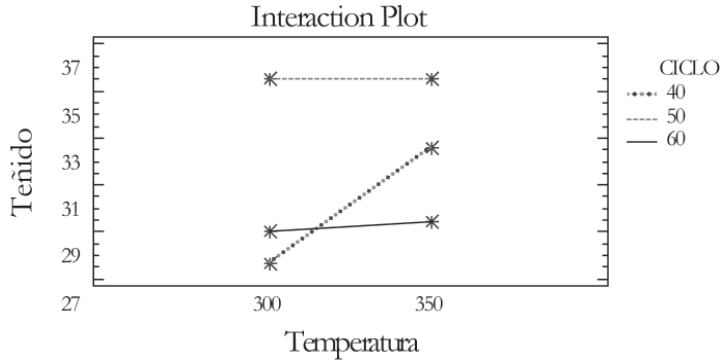
* indica una diferencia significativa.

5.7.8 Gráficas de interacciones significativas

5.7.8.1 Gráficas de interacciones Operario-Tiempo de ciclo



5.7.8.1 Gráficas de interacciones Temperatura-Tiempo de ciclo



5.8 Ejercicios

Para los siguientes ejercicios determine:

(a) ¿Cuáles son los factores controlados y cuál es la variable de respuesta?

(b) Enuncie el nombre del diseño experimental utilizado y formule las hipótesis que se pueden probar en este caso.

(c) Mediante el análisis estadístico apropiado pruebe las hipótesis que formuló antes.

(d) Apoyándose en pruebas de rangos múltiples y la gráfica de interacciones encuentra las condiciones para obtener mayor rendimiento del proceso.

(e) Prepare las gráficas apropiadas de residuos y verifique supuestos. ¿Las conclusiones que obtuvo antes se siguen manteniendo?

Práctica 5.8.1. Se tiene interés en el rendimiento de un proceso en particular para ello se consideran tres factores: A el efecto de la temperatura (100, 120, 140), B la presión (400, 450, 500) y el tiempo C del lavado del producto en seguida del proceso de enfriamiento (30 y 35 minutos). Se realizan tres pruebas en cada combinación de los factores. Los resultados del experimento son los siguientes:

	C					
	30 minutos			35 minutos		
	B					
	400	450	500	400	450	500
A						
	31.7	30.3	31.2	24.9	25.5	27.2
100	30.8	30.2	31.6	27.1	26.1	26.7
	31.3	30.5	32.0	26.5	25.3	26.0
	30.4	30.2	30.7	23.8	27.6	25.8
120	31.8	30.9	30.5	26.3	22.5	25.2
	31.5	30.5	30.2	25.9	24.9	26.5
	33.6	32.0	31.1	25.7	25.2	26.9
140	34.1	31.6	31.0	26.7	26.5	26.6
	34.5	31.5	31.5	27.7	25.9	27.2

Práctica 5.8.2. Se está investigando los efectos sobre la resistencia del papel que producen el porcentaje de la concentración de fibra de madera en la pulpa, la presión del tanque y el tiempo de cocción de la pulpa. Se seleccionan tres niveles de concentración de madera y de la presión, y dos niveles de tiempo de cocción. Se realiza un experimento factorial con dos réplicas y se recopilan los datos.

Concentración porcentual de fibra	Presión durante el tiempo de cocción de 3.0 h			Presión durante el tiempo de cocción de 4.0 h		
	Presión			Presión		
	400	500	650	400	500	650
2	196.6	197.7	199.8	198.4	199.6	200.6
	196.0	196.0	199.4	198.6	200.4	200.9
4	198.5	196.0	198.4	197.5	198.7	199.6
	197.2	196.9	197.6	198.1	198.0	199.0
8	197.5	195.6	197.4	197.6	197.0	198.5
	196.6	196.2	198.1	198.4	197.8	199.8

Práctica 5.8.3 Para un estudio de la dureza de dientes de relleno dentales de oro, se asignan combinaciones de tres métodos de condensación (A), dos tipos de oro (B) a cuatro dentistas.

		Tipo de Oro			
Dentista	**Método**	Hoja de oro		Goldent	
1	1	792	782	824	798
	2	772	789	772	754
	3	782	756	803	782
2	1	803	820	803	813
	2	752	785	772	765
	3	715	723	707	723
3	1	715	715	724	745
	2	792	724	715	719
	3	762	745	606	609
4	1	673	634	946	956
	2	657	649	743	734
	3	690	724	745	756

Práctica 5.8.4. Considere la combinación de los tres factores en la eliminación de la mugre de cargas estándar de lavandería. El primer factor es la marca de detergente X,Y o Z. El segundo factor es el tipo de detergente, líquido o en polvo. El tercer factor es la temperatura del agua, caliente o tibia. El experimento se replica tres veces. La respuesta es el porcentaje de eliminación de mugre, los datos son los siguientes:

Marca	**Tipo**	**Temperatura**	Réplicas		
X	Polvo	Caliente	85	88	80
		Tibia	82	83	85
	Líquido	Caliente	78	75	72
		Tibia	75	75	73
Y	Polvo	Caliente	90	92	92
		Tibia	88	86	88
	Líquido	Caliente	78	76	70
		Tibia	76	77	76
Z	Polvo	Caliente	85	87	88
		Tibia	76	74	78
	Líquido	Caliente	60	70	68
		Tibia	55	57	54

Práctica 5.8.5. Se realizó un experimento para determinar el efecto del tiempo de mezclado (A: 10, 15 y 20min), la máquina (B: A, B) y la velocidad de agitación (C: 40 y 80rpm) en el acabado de pisos de cerámica. Se realizó un experimento multifactorial 3X2X2 con 3 réplicas. Los resultados obtenidos se muestran en la tabla.

		B: Máquina A		B: Máquina B	
		C: velocidad de agitación 40	C: velocidad de agitación 80	C: velocidad de agitación 40	C: velocidad de agitación 80
A: tiempo de cocción	10	35	34	21	31
		31	35	20	33
		32	34	25	36
	15	33	31	24	31
		32	35	26	33
		33	36	27	28
	20	35	42	23	45
		41	32	26	43
		34	41	27	41

Practica 5.8.6. El método de fluorescencia de rayos X es una herramienta analítica importante para determinar la concentración de material en los propulsores sólidos de misiles. Se postula que el proceso de mezcla del propulsor y el tiempo del análisis tienen una influencia en la homogeneidad del material y por ello sobre la precisión de las mediciones de la intensidad de rayos X. Se llevó a cabo un experimento con el uso de tres factores: A, condiciones de mezclado (4 niveles); B, el tiempo del análisis (2 niveles); y C, el método de carga del propulsor en los soportes de la muestra (caliente y temperatura ambiente). Se registraron los siguientes datos, que representan el análisis en porcentaje de peso de perclorato de amonio en un propulsor particular:

	Método de carga C			
	Caliente		Temperatura ambiente	
A	B		B	
	1	2	1	2
1	38.62	37.20	38.02	38.45
	38.64	38.75	38.92	39.15
	39.78	39.82	40.26	39.72
2	37.67	37.57	37.85	37.81
	37.75	37.91	39.53	39.76
	39.90	39.56	39.25	39.04
3	37.51	37.74	37.58	37.21
	37.42	37.79	39.34	39.60
	39.62	39.74	39.49	39.45
4	37.52	37.15	37.51	37.60
	37.55	3 7.91	40.09	39.63
	39.67	39.36	39.38	39.00

a) ¿Existe indicio de que alguno de los factores influya el porcentaje de peso de perclorato de amonio? Con un nivel de significancia de 0.01.
b) En caso de ser necesario realizar la prueba de LSD
c) ¿Hay interacción entre los factores?
d) En caso de ser necesario realizar la(s) gráfica(s) de interacción.

Diseño factoriales 2^k

Capítulo VI

Capítulo VI

Diseño factoriales 2^k

6.1 Diseños factoriales Diseños 2^k

Los diseños factoriales son ampliamente utilizados en experimentos en los que intervienen varios factores para estudiar el efecto conjunto de éstos sobre una respuesta. Un caso especial e importante ocurre cuando se tienen k factores, cada uno con dos niveles que pueden ser cuantitativos o cualitativos.

Tabla de ejemplos de tipo de factores

Cuantitativos	Cualitativos
Temperatura	Operadores
Tiempo	Máquinas
Presión	Ausencia o presencia de un factor

¿Por qué se le denomina diseño 2^k?

El caso más simple de los diseños 2^k, es cuando se tienen 2 factores A y B y cada uno con dos niveles, a=2 y b=2, una réplica completa de este diseño constará de ab=2x2 = 2^2 combinaciones. Si son tres factores (A, B y C) y cada factor con dos niveles (a=2, b=2, c=2) una réplica completa constará de abc = 2X2X2 = 2^3 combinaciones. Generalizando este resultado, suponiendo que tenemos K factores (A, B, C , D … K), y cada factor con 2 niveles (a=2, b=2, c=2, d=2,… k=2), una réplica completa de tal diseño requiere que se recopilen 2x2x2...x2=2^k combinaciones u observaciones y que se conoce como *diseño factorial* 2^k.

En los diseños factoriales 2^k, se supone que:

1) Los factores son fijos,
2) Los diseños son completamente aleatorizados y
3) Se satisface la suposición de normalidad.

6.2 Aplicación del diseño 2^k

En la mayor parte de los problemas reales los factores que pueden afectar a la variable de respuesta estudiada son numerosos. El procedimiento típico (y equivocado) para abordar este tipo de problemas, es hacer pruebas modificando un factor a la vez. Éste es desaconsejable porque:

- Es muy costoso (exige muchas pruebas).

- Las conclusiones obtenidas para cada factor tienen un campo de validez muy restringido.
- No permite detectar la presencia de interacciones.
- No garantiza la obtención de las condiciones óptimas.

El diseño 2^k es particularmente útil en las primeras fases del trabajo experimental, cuando es probable que haya muchos factores por investigar si tienen influencia sobre la variable de respuesta.

Este diseño es el más económico en el sentido de que es el diseño factorial completo que implica el menor número de corridas con las cuales pueden estudiarse k factores. Debido que sólo hay dos niveles para cada factor, debe suponerse que la respuesta es aproximadamente lineal en el intervalo de los niveles elegidos de los factores.

6.3 El diseño 2^2

6.3.1 Ejemplo

Un diseño 2^2 es aquel donde se estudian dos factores, por ejemplo el factor A y el factor B, una réplica completa del experimento consta de 4 combinaciones. A modo de ejemplo, consideremos una investigación llevada a cabo para estudiar el efecto que tiene la concentración de un reactivo y la presencia de un catalizador sobre el tiempo de reacción de un proceso químico. Sea la concentración del reactivo el factor A con dos niveles 15%y 20 %. El catalizador constituye el factor B; el uso de dos sacos de catalizador y el uso de un sólo saco. El experimento se repite tres veces, las 12 corridas se realizan de manera aleatoria, y los datos son como siguen:

A: Concentración	B: Catalizador	
	Un saco	Dos Sacos
15%	28	18
	25	19
	27	23
20%	36	31
	32	30
	32	29

6.3.2 Presentación de datos y etiquetación de niveles

Debido a que únicamente son dos niveles por factor, es común renombrar los niveles, una forma de hacerlo es la siguiente: a un nivel lo renombraremos como nivel bajo y al otro como nivel alto, y serán etiquetados con los signos "+" y "-" respectivamente, por ejemplo para el factor A: concentración, el porcentaje de 15 será renombrado como nivel bajo (-) y el porcentaje de 20 será renombrado nivel alto (+). El factor B; el uso de dos sacos de catalizador es el nivel alto (+) y el uso de un solo saco, el nivel bajo (-). En la presentación de los datos, suele colocar las replicas de cada combinación en fila, como se muestra en la siguiente tabla:

Factores		Réplicas		
A: Concentración	B:Catalizador	I	II	III
-	-	28	25	27
+	-	36	32	32
-	+	18	19	23
+	+	31	30	29

Para simplificar aún más la presentación de las 4 combinaciones del diseño 2^2, le asignaremos un código cada combinación, de la siguiente forma: cuando los factores están en el nivel bajo le asignaremos el código (1), y las combinaciones restantes su código estará compuesto por la letra minúscula del factor que este en el nivel alto. Por ejemplo, la combinación cuando el factor A este en el nivel alto y el factor B en el nivel alto será representado por el código ab. El código también representará la suman de las réplicas realizadas en cada combinación, es decir el total de las replicas.

Código	Factores		Réplicas			Total
	A: Concentración	B: Catalizador	I	II	III	
(1)	-	-	28	25	27	80
a	+	-	36	32	32	100
b	-	+	18	19	23	60
ab	+	+	31	30	29	90

6.3.3 Análisis de problema

La variable de respuesta para nuestro ejemplo es el tiempo de reacción de un proceso químico. En este diseño analizaremos tres efectos, el efecto del factor A, del factor B y la interacción entre estos factores en el tiempo de reacción del proceso químico, este efecto estará simbolizado por AB.

Modelo matemático:

$$Y_{ijk} = \mu + \tau_i + \beta_j + \tau\beta_{ij} + \varepsilon_{ijk}$$

Donde:
μ: Media global
τ: Efecto de la concentración (A)
β: Efecto del catalizador (B)
$\tau\beta$: Interacción entre la concentración y el catalizador (AB)
ε: Error aleatorio o residual

Hipótesis a probar:

Para el factor A:

Ho: La concentración de un reactivo no influye en el tiempo de reacción de un proceso químico.

Ho: $\tau_i=0$ para $i=1,2$

Ha: La concentración de un reactivo si influye en el tiempo de reacción de un proceso químico.
Ha: Al menos un $\tau_i \neq 0$ para $i = 1,2$

Para el factor B:
Ho: El catalizador no influye en el tiempo de reacción de un proceso químico.
Ho: $\beta_i = 0$ para $i = 1,2$

Ha: El catalizador si influye en el tiempo de reacción de un proceso químico.
Ha: Al menos un $\beta_i \neq 0$ para $i = 1,2$

Para la interacción AB:
Ho: No hay efecto de interacción entre la concentración de un reactivo y el catalizador en el tiempo de reacción de un proceso químico.

Ho: $(\tau\beta)_{ij} = 0$ para $\begin{cases} i=1,2 \\ j=1,2 \end{cases}$

Ha: Hay efecto de interacción entre la concentración de un reactivo y el catalizador en el tiempo de reacción de un proceso químico.

Ha: Al menos un $(\tau\beta)_{ij} \neq 0$ para $\begin{cases} i=1,2 \\ j=1,2 \end{cases}$

6.4 Solución estadistica del diseño 2^2

Para dar solución estadística a este diseño es necesario como primer paso calcular los contrastes:

1.- Cálculo de contrastes de los efectos
El contraste se define como el efecto total, para los efectos principales es la suma de réplicas cuando el factor esta en el nivel alto menos la suma de réplicas cuando el factor esta en el nivel bajo.

Por ejemplo, el factor A esta en el nivel alto, en las combinaciones representadas por los códigos a, ab, y está en el nivel bajo en los códigos (1) y b, entonces el contraste del factor A podemos calcularlo a través de la siguiente ecuación:

Contraste (A)= [(a + ab) – ((1) + b)] = [a + ab – (1) - b]

Al sustituir el total de cada código respectivo resulta:

Contraste (A)= [100 + 90 – 80 – 60] = [50]

Lo mismo hacemos para el factor B.

Contraste (B)= [(b + ab) – ((1) + a)] = [b + ab – (1) – a] = [-30]

Y para obtener el contraste de la interacción es necesario calcular los signos de la interacción, de la siguiente manera:

Se multiplican los signos del factor A por los signos del factor B, con lo que se obtiene la primera columna de signos de la interacción AB:

Interacción		Factores		Réplicas			
AB	Código	A	B	1	2	3	Total
+	(1)	-	-	28	25	27	80
-	a	+	-	36	32	32	100
-	b	-	+	18	19	23	60
+	ab	+	+	31	30	29	90

Y el contraste de AB será la multiplicación de la columna de signos de la interacción AB por el código respectivo, es decir,

Contraste (AB)= [(1) – a – b + ab] = [(1)+ ab – a – b]= [80 + 90 – 100 - 60]= [10]

2.- Estimación de los efectos promedios

Una vez calculado los contrastes podremos estimar los efectos promedios, dividiendo el contraste por 2n, donde n representa el número de réplicas, esto es:

Efecto promedio (factor o interacción) = contraste (factor o intreacción) / 2n

Utilizando las ecuaciones anteriores podemos representar el efecto promedio de cada efecto por las siguientes formulas sencillas.

Efecto promedio (A) = [a + ab – (1) - b] / 2n
Efecto promedio (B)= [b + ab – (1) - a] / 2n
Efecto promedio (AB)= [(1) + ab – a - b] / 2n

Al remplazar los valores anteriormente calculados, el resultado de los efectos promedios es el siguiente:

Efecto promedio (A) = [50] / 2*3 =8.33
Efecto promedio (B)= [-30] /2*3 = - 5
Efecto promedio (AB)= [10] /2*3=1.67

Interpretación de los efectos promedios principales

El efecto promedio del factor A, indica que cuando la concentración cambia de 15% al 20% el tiempo de reacción del proceso químico aumenta en aproximadamente 8.33 unidades, y para el factor B, indica que cuando aumentamos de un saco de catalizador a dos sacos el tiempo de reacción del proceso disminuye en aproximadamente 5 unidades.

Diagrama de Pareto de los efectos promedios

El diagrama de Pareto, nos facilita el entendimiento de los efectos promedios cuando se tienen muchos efectos por estudiar, ya que de manera más rápida podemos visualizar cual efecto o cuales efectos son de mayor impacto en la variable de respuesta y puede ser creado a mano o por un software de manera automática

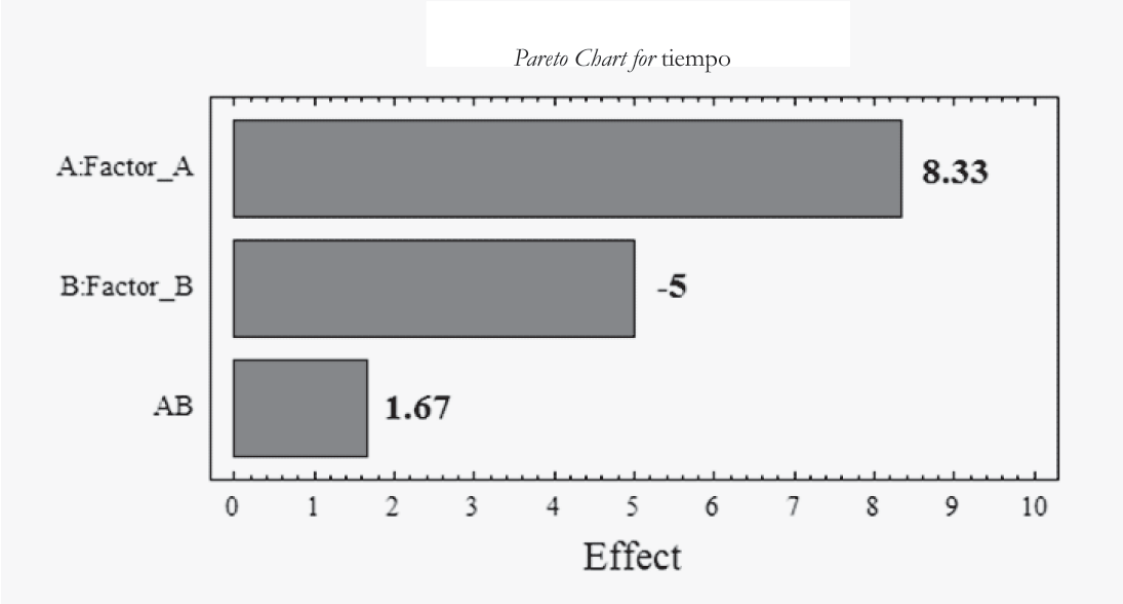
Creación del diagrama de Pareto

Primeramente se ordenan en descendente los efectos promedios sin tomar en cuenta su signo (valor absoluto) y se grafican en un primer cuadrante a través de barras (horizontales o verticales), iniciando por el mayor y terminando por el menor.

Ejemplo del diagrama de Pareto para el ejemplo:

Tabla de efectos promedios ordenados

Efecto	Efecto promedio
A	8.33
B	-5
AB	1.67



Interpretación:

La concentración es el factor que más influye, seguido por el catalizador y la interacción AB es de menor efecto que influye en el tiempo de reacción de un proceso.

3.- Cálculo de las sumas de cuadrados

La sumas de cuadrados de los efectos, se obtienen mediante las siguientes ecuaciones:

$$SC_{TOTAL}=SC_A + SC_B + SC_{AB} + SC_{ERROR}$$

La suma de cuadrados de los efectos A, B y AB, lo obtendremos elevando al cuadrado su contraste y dividiendo el resultado por 4n, esto es:

$$SC_A= [CONTRASTE(A)]^2/4n= [a + ab – (1) - b)]^2/4n$$

$$SC_B= [CONTRASTE(B)]^2/4n= [b + ab – (1) - a)]^2/4n$$

$$SC_{AB}= [CONTRASTE(AB)]^2/4n= [(1) + ab – a - b)]^2/4n$$

Al sustituir el valor de cada contraste obtenemos los siguientes resultados:

$$SC_A = [50]^2/4*3=208.33$$

$$SC_B = [-30]^2/4*3=75$$

$$SC_{AB} = [10]^2/4*3=8.333$$

La obtención de la suma de cuadrados totales lo realizaremos a través de la siguiente fórmula:

$$SC_{TOTAL} = \sum_{i=1}^{a} \sum_{j=1}^{b} \sum_{k=1}^{n} y_{ijk}^2 - \frac{y_{....}^2}{abn}$$

$$SC_{TOTAL} = 28^2 + 25^2 + 27^2 + ... + 29^2 - \frac{330^2}{12}$$

$$SC_{TOTAL} = 9398.00\text{-}9075.00 = 323.00$$

La suma de cuadrados del error lo obtendremos por diferencia, es decir:

$$SC_{Error}= SC_{Total}\text{-}SC_A\text{-}SC_B\text{-}SC_{AB}$$

$$SC_{Error}= 323 - 208.33 - 75 - 8.33 = 31.34$$

4.- Obtención de los grados de libertad

Los grados de libertad los podemos obtener por las formulas que se muestran en la siguiente tabla:

Fuente de variación	Grados de libertad	Grados de libertad para el ejemplo
Concentración(A)	a-1	2-1 =1
Catalizador(B)	b-1	2-1=1
Interacción concentración-catalizador(AB)	(a-1)(b-1)	1x1=1
Error	ab(n-1)	2x2x2=8
Total	abn-1	12-1=11

5.- Cuadrados medios

Para obtener los cuadrados medios, dividimos las sumas de cuadrados por sus grados de libertad respectivos, como se muestra a continuación:

Cuadrado medio del factor A (CM_A) = $SC_A/a-1$

Cuadrado medio del factor B (CM_B) = $SC_B/b-1$

Cuadrado medio del AB (CM_{AB}) = $SC_{AB}/(a-1)(b-1)$

Cuadrado medio del error (CM_{Error}) = $SC_{ERROR}/ab(n-1)$

Sustituyendo los valores correspondientes en las formulas tenemos que:

CM_A = 208.33/1=208.33

CM_B = 75/1=75

CM_{AB} = 8.333/1=8.333

CM_{Error} = 31.34/8=3.92

Observemos que debido a que los grados de libertad de los efectos de estudio son uno, la suma de cuadrados es igual a los cuadrados medios.

Valor de F-calculada y el valor Crítico (F-tabla)

El valor de nuestro estadístico de prueba (F- calculada) de cada efecto, lo podemos obtenerlo dividiendo el cuadrado medio del efecto entre el cuadrado medio del error, y valor critico (F- tabla), se obtiene de la tabla de F con un grado de libertad en el numerador y ab(n-1) grados de libertad en el denominador, en este ejemplo el valor crítico tiene un grado de libertad en el numerador y 8 en el denominador, con un nivel de significancia (α) del 0.05, el valor de la F-tablas es 5.32 (apéndice A).

6.- Construcción del ANOVA

Con los resultados anteriores, podemos construir la tabla de ANOVA

Fuente de variación	Suma de cuadrados	Grados de libertad	Cuadrado Medio	F calculada	F tablas
Concentración(A)	208.33	1	208.33	208.33/3.92=53.14	5.32
Catalizador(B)	75	1	75	75/3.92=19.13	
Interacción concentración -catalizador(AB)	8.333	1	8.333	8.333/3.92=2.12	
Error	31.34	8	3.92		
Total	323	11			

10. Conclusión del ANOVA

Para el efecto de concentración (A):

Como la $F_{calculada}$=53.14 es mayor que la F_{tablas}=5.32, el efecto de la concentración si influye significativamente en el tiempo de reacción de un proceso químico.

Para el efecto del catalizador (B):

Como la $F_{calculada}$=19.13 es mayor que la F_{tablas}=5.32, el efecto del catalizador influye significativamente en el tiempo de reacción de un proceso químico.

Para el efecto de interacción concentración-catalizador (AB):

Como la $F_{calculada}$=2.12 es menor que la F_{tablas}=5.32, el efecto de interacción concentración-catalizador no influye significativamente en el tiempo de reacción de un proceso químico.

11. Gráficas de efectos promedio para los efectos simples significativos:

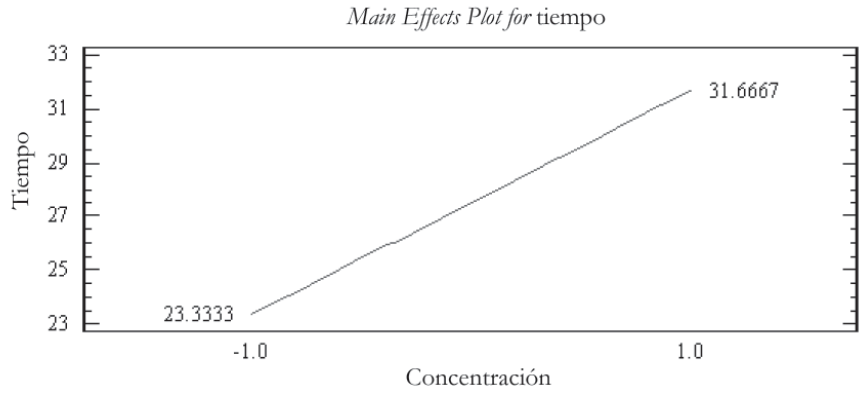
Es recomendable graficar los efectos simples que resultaron significativos para visualizar el efecto del factor, para ello es necesario calcular los promedios de cada efecto en el nivel alto y bajo, por ejemplo para el factor A, calculamos:

El promedio cuando A esta en el nivel bajo = $\frac{(1)+b}{2n}=\frac{80+60}{2*3}=23.33$

El promedio cuando A esta en el nivel alto = $\frac{a+ab}{2n}=\frac{100+90}{2*3}=31.66$

Tabla de resultados para el efecto de concentración (A):

Nivel	Promedio
-	23.33
+	31.66



Interpretación:
Hay un efecto positivo cuando se cambia de nivel bajo a nivel alto el tiempo de reacción de un proceso químico se incrementa. Si se requiere menor tiempo, se recomienda el nivel bajo de concentración.

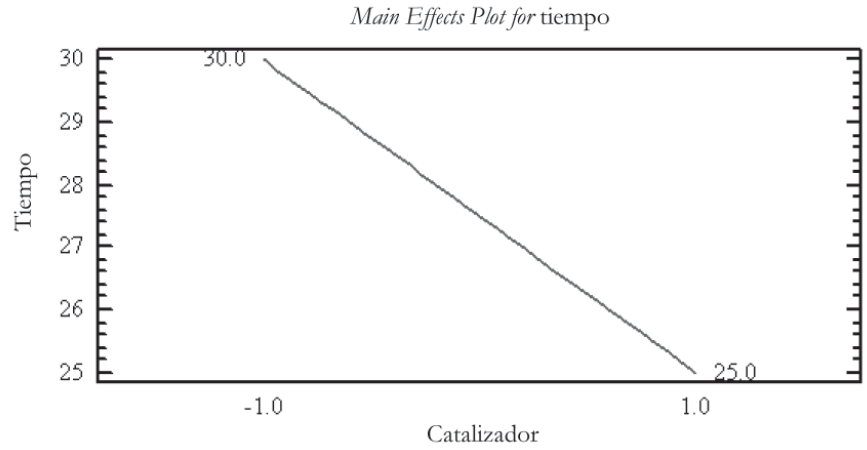
Para el efecto del catalizador (B)

El promedio cuando B esta en el nivel bajo = $\frac{(1)+a}{2n}=\frac{80+100}{2*3}=30$

El promedio cuando B esta en el nivel alto = $\frac{b+ab}{2n}=\frac{60+90}{2*3}=25$

Tabla de resultados para el efecto de catalizador (B):

Nivel	Promedio
-	30
+	25



Interpretación:
Hay un efecto negativo cuando se cambia del nivel bajo a nivel alto en el catalizador, el tiempo de reacción de un proceso químico disminuye. Si lo que se quiere es menor tiempo de reacción se recomienda nivel alto de catalizador.

12. Conclusión y recomendaciones

- Sólo son significativos los efectos simples de concentración y catalizador.
- Las recomendaciones para la concentración es el nivel alto.
- Las recomendaciones para el catalizador es el nivel bajo.

Diagrama de Pareto estandarizado
El diagrama de Pareto estandarizado, nos permite visualizar de manera rápida los efectos significativos de un diseño, así como los efectos de mayor magnitud y su construcción es sencilla, para ello primero se estandarizan los efectos dividiendo el efecto promedio por error estándar es decir:

$$Efecto\ estandarizado = \frac{Efecto\ promedio}{Error\ estándar}$$

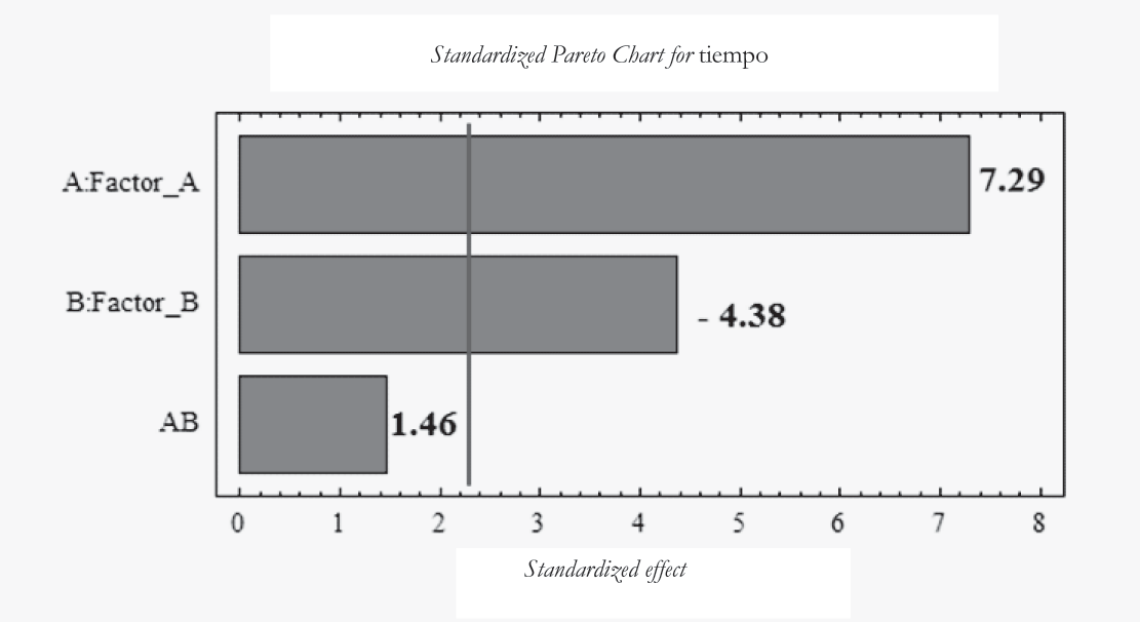
Donde el error estándar se calcula con la siguiente fórmula:

$$Error\ estándar = \sqrt{\frac{CM_{ERROR}}{n2^{k-2}}}$$

Por ejemplo aplicando las fórmulas anteriores calculamos el efecto estandarizado para el factor A, de la siguiente manera:

Error estándar = $\sqrt{\frac{3.92}{3}} = 1.143$, y efecto estandarizado (A) = $\frac{8.33}{1.143} = 7.29$

De la misma forma calculamos los efectos estandarizados para los efectos del factor B y la interacción AB. Graficamos en un primer cuadrante, colocando en el eje de las x's el efecto estandarizado y en el eje de las y's los efectos en orden descendente (valor absoluto), como se muestra en la siguiente gráfica.



Los efectos significativos, serán aquellos que resulten con un efecto estándar mayor al valor crítico (Vo), donde el valor crítico Vo= $\sqrt{F^{1}_{ab(n-1)}}$. Para el ejemplo, el valor de $F^{1}_{ab(n-1)} = 5.32$ y su raíz cuadrada es 2.306. El valor crítico es representado por una línea en grafica del Pareto estandarizado.

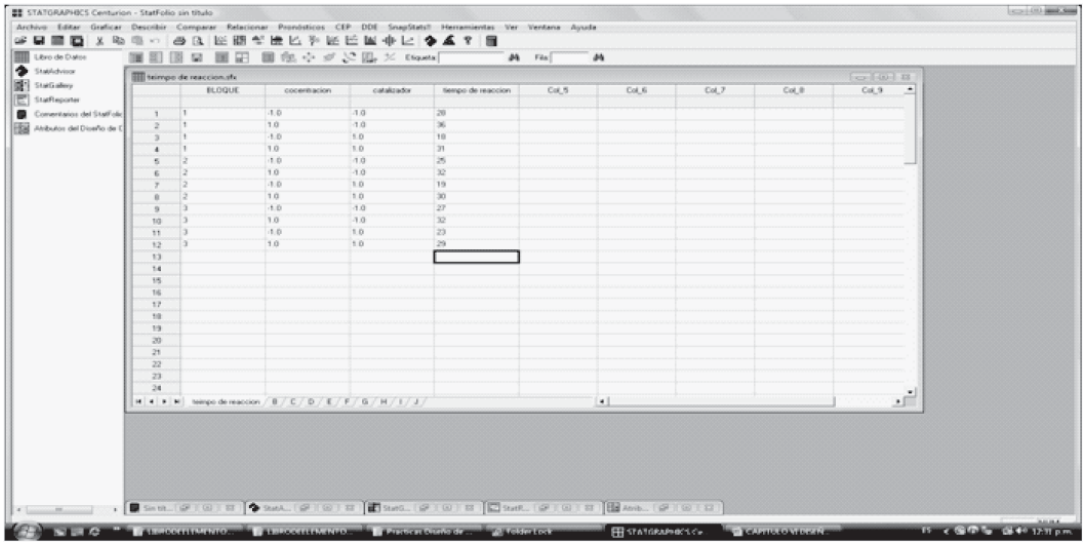
Interpretación

Los efectos significativos son la concentración y el catalizador, donde la concentración es el factor que más influye en el tiempo de reacción de un proceso.

6.5 Captura de datos y salida de resultados del ejemplo

6.3.1 Usando el *statgraphics* centurion XV

6.5.1 Captura de datos en el *Statgraphics*



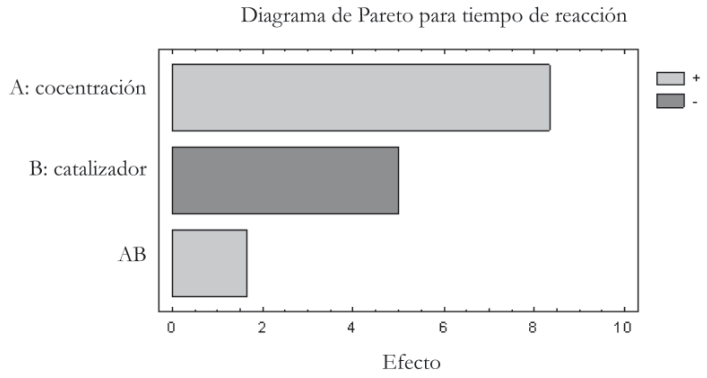
6.5.2 Tabla de efectos promedio

Efectos estimados para tiempo de reacción

Efecto	Estimado	Error Estd.	V.I.F.
promedio	27.5	0.571305	
A:cocentracion	8.33333	1.14261	1.0
B:catalizador	-5.0	1.14261	1.0
AB	1.66667	1.14261	1.0

Errores estándar basados en el error total con 8 g.l.

6.5.3 Pareto normal

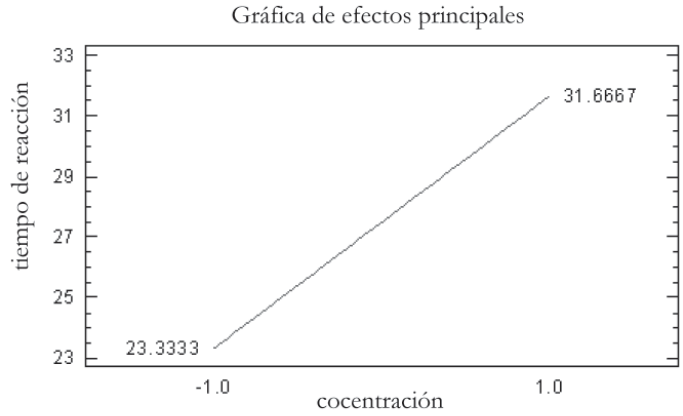


6.5.4 Análisis de Varianza

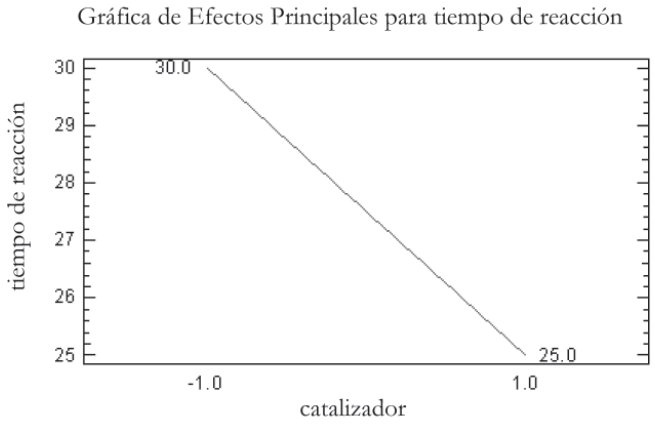
Análisis de Varianza para tiempo de reacción

Fuente	Suma de Cuadrados	Gl	Cuadrado Medio	Razón-F	
Valor-P					
A:cocentración	208.333	1	208.333	53.19	0.0001
B:catalizador	75.0	1	75.0	19.15	0.0024
AB	8.33333	1	8.33333	2.13	0.1828
Error total	31.3333	8	3.91667		
Total (corr.)	323.0	11			

6.5.5 Gráficas de efectos principales



6.5.5.1 Gráfica de efecto principal para concentración



6.5.5.2 Gráfica de efecto principal para catalizador

6.6 Ejercicios

Practica 6.6.1

Una bacterióloga está interesada en el efecto que tienen dos diferentes medios de cultivo (factor A): 1(nivel bajo) y 2 (nivel alto); y dos lapsos de tiempo (factor B):12 hrs (nivel bajo) y 18 hrs (nivel alto) sobre crecimiento de un virus en particular. Realiza seis replicas de un diseño 2^2 haciendo los ensayos en un orden aleatorio. Los resultados son los siguientes:

Código	Factores		Réplicas					
	A	B	I	II	III	IV	V	VI
	-	-	21	23	20	22	28	26
	+	-	25	24	29	26	25	27
	-	+	37	38	35	39	38	36
	+	+	31	29	30	34	33	35

a) Obtenga el Pareto normal e interprete.
b) Obtenga el ANOVA e intérprete, use α=0.05.
c) Realice los análisis complementarios y establezca conclusiones.

Practica 6.6.2

Un ingeniero industrial que trabaja en una embotelladora esta interesado en el efecto de dos tipos de botella (factor A) de 32 onzas sobre el tiempo de reparto de cajas de 12 botellas de este producto. Los dos tipos de botella son de plástico (nivel bajo) y de vidrio (nivel alto), y se utilizan dos repartidores (factor B) para realizar una tarea que consiste en mover 40 cajas del producto a una distancia de 50 pies sobre un carrito repartidor, y acomodarlos. Se realiza un diseño factorial ; y los tiempos observados se muestran en la siguiente tabla:

Código	Factores		Réplicas			
	A	B	I	II	III	IV
	-	-	5.12	4.98	4.89	5
	+	-	6.65	5.49	6.24	5.55
	-	+	4.95	4.27	4.43	4.25
	+	+	5.28	4.75	4.91	4.71

a) Obtenga el Pareto normal e interprete.
b) Obtenga el ANOVA e intérprete, use α=0.05.
c) Realice los análisis complementarios y establezca conclusiones.

Diseño factoriales 2^3

Capítulo VII

Capítulo VII

Diseño factoriales 2^3

7.1 El diseño 2^3

Un diseño de la serie 2^k es aquel que tiene tres factores, A, B y C, cada uno con dos niveles. Este diseño se conoce como diseño factorial 2^3. Arbitrariamente, los niveles del factor pueden llamarse "inferior" y "superior".

Por convención, el efecto de un factor se denota por la letra latina mayúscula. De este modo "A" se refiere al efecto del factor A, "B" se refiere al efecto del factor B, y "AB" se refiere a la interacción AB. En el diseño 2^3, los niveles bajo y alto de los efectos de A, B y C se denotan por "-" y "+", respectivamente. Cada combinación puede estar representada por un código, donde (1) indica que los factores están en el nivel bajo, y en las combinaciones restantes su código será denotado con la letra minúscula del factor que este en nivel alto, por ejemplo en la combinación donde A esta en el nivel alto, B en el nivel alto y C en el nivel bajo, la combinación será representada por el código ab, y generalmente se presentan en primera columna de la tabla de datos.

7.2 Ejemplo 7.1

Un ingeniero está interesado en el efecto que tiene la rapidez de corte (factor A), la configuración (factor B) y el ángulo de corte (factor C) sobre la resistencia de una herramienta. Se eligen dos niveles de cada factor y se realiza un diseño factorial con dos réplicas. Los resultados se muestran a continuación:

Combinación	Factores			Réplicas		Totales
	A	B	C	I	II	
(1)	-	-	-	18.2	18.9	37.1
a	+	-	-	27.2	24.0	51.2
b	-	+	-	15.9	14.5	30.4
ab	+	+	-	41.0	43.9	84.9
c	-	-	+	12.9	14.4	27.3
ac	+	-	+	22.4	22.5	44.9
bc	-	+	+	15.1	14.2	29.3
abc	+	+	+	36.3	39.9	76.2

Tabla 7.1. Resistencia de una herramienta.

7.2.1 Análisis del problema

Un primer paso es comprender el problema para ello debemos identificar la variable de respuesta y los factores controlados.

Variable de respuesta: Resistencia de una herramienta
Factores controlados:

- Rapidez de corte (A)
- Configuración (B)
- Angulo de Corte (C)

Establecimiento del modelo estadístico y las hipótesis.

En el modelo estadístico para el diseño 2^3, la variable de respuesta es igual a la media global (μ), más la suma del efecto de los tres factores principales A, B, C, (τ, β y γ respectivamente), más el efecto de las tres interacciones dobles: AB, AC y BC (indicados por $(\tau\beta)$, $(\tau\gamma)$ y $(\beta\gamma)$ respectivamente), más la interacción triple ABC (denotado por $\tau\beta\gamma$) y el error aleatorio (ε).

Modelo estadístico:

$$y_{ijkl} = \mu + \tau_i + \beta_j + \gamma_k + (\tau\beta)_{jk} + (\tau\gamma)_{ik} + (\beta\gamma)_{jk} + (\tau\beta\gamma)_{ijk} + \varepsilon_{ijkl}$$

Hipótesis
Las hipótesis se establece para los 7 efectos de estudio: A, B, C, AB, AC, BC, Y ABC

Hipótesis para factor A:
Ho: No influye la rapidez de corte en la resistencia de una herramienta.
Ho: $\tau_i = 0$ para i=1,2

Ha: Si influye la rapidez de corte en la resistencia de una herramienta.
Ha: Al menos un $\tau_i \neq 0$ para i= 1,2

Hipótesis para el factor B
Ho: No influye la configuración en la resistencia de una herramienta.
Ho: $\beta_j = 0$ para j=1,2

Ha: Si influye la configuración en la resistencia de una herramienta.
Ha: Al menos un $\beta_j \neq 0$ para j= 1,2

Hipótesis para el factor C
Ho: No influye el ángulo de corte en la resistencia de una herramienta.
Ho: $\gamma_k = 0$ para k=1,2

Ha: Si influye el ángulo de corte en la resistencia de una herramienta.

Ha: Al menos un $\gamma_k \neq 0$ para $k = 1,2$

Hipótesis para la interacción AB

Ho: No hay efecto de interacción entre la rapidez de corte y la configuración en la resistencia de una herramienta.

Ho: $(\tau\beta)_{ij}=0$ para $\begin{cases} i=1,2 \\ j=1,2 \end{cases}$

Ha: Si hay efecto de interacción entre la rapidez de corte y la configuración en la resistencia de una herramienta.

Ha: Al menos un $(\tau\beta)_{ij} \neq 0$ para $\begin{cases} i=1,2 \\ j=1,2 \end{cases}$

Hipótesis para la interacción AC

Ho: No hay efecto de interacción entre la rapidez de corte y el ángulo de corte en la resistencia de una herramienta.

Ho: $(\tau\gamma)_{ik} = 0$ para $\begin{cases} i=1,2 \\ k=1,2 \end{cases}$

Ha: Si hay efecto de interacción entre la rapidez de corte y el ángulo de corte en la resistencia de una herramienta.

Ha: Al menos un $(\tau\gamma)_{ik} \neq 0$ para $\begin{cases} i=1,2 \\ k=1,2 \end{cases}$

Hipótesis para la interacción BC

Ho: No hay efecto de interacción entre la configuración y el ángulo de corte en la resistencia de una herramienta.

Ho: $(\beta\gamma)_{jk} = 0$ para $\begin{cases} j=1,2 \\ k=1,2 \end{cases}$

Ha: Si hay efecto de interacción entre la configuración y el ángulo de corte en la resistencia de una herramienta.

Ha: Al menos un $(\beta\gamma)_{jk} \neq 0$ para $\begin{cases} j=1,2 \\ k=1,2 \end{cases}$

Hipótesis para la interacción ABC

Ho: No hay efecto de interacción entre la rapidez de corte, la configuración y el ángulo de corte en la resistencia de una herramienta.

Ho: $(\tau\beta\gamma)_{ijk} = 0$ para $\begin{cases} i=1,2 \\ j=1,2 \\ k=1,2 \end{cases}$

Ha: Si hay efecto de interacción entre la rapidez de corte, la configuración y el ángulo de corte en la resistencia de una herramienta.

Ha: Al menos un $(\tau\beta\gamma)_{ijk} \neq 0$ para $\begin{cases} i=1,2 \\ j=1,2 \\ k=1,2 \end{cases}$

7.3 Solución estadística del diseño 2^3

1.- Construcción de la tabla de los signos de las interacciones.

El cálculo de los contrastes se hace más sencillo si construimos una tabla de signos, su construcción se realiza de la siguiente forma: en una tabla colocamos en columnas los signos en orden estándar de los efectos principales A, B, y C respectivamente (como se muestra en la siguiente tabla), en seguida agregamos las columnas para las interacciones AB, AC, BC y ABC, para completar los signos de estas columnas, multiplicamos los signos correspondientes de los factores involucrados en cada interacción, por ejemplo, observe en la siguiente tabla la multiplicación de signos para las interacciones AB y ABC. La tabla de signos puede ser construida para cualquier diseño 2^k.

Tabla de signos para el diseño 2^3

Códigos	A	B	C	AB	AC	BC	ABC
(1)	-	-	-	(-)(-) = +	+	+	(-)(-)(-) = -
a	+	-	-	(+)(-) = -	-	+	(+)(-)(-) = +
b	-	+	-	(-)(+) = -	+	-	(-)(+)(-) = +
ab	+	+	-	(+)(+) = +	-	-	(+)(+)(-) = -
c	-	-	+	(-)(-) = +	-	-	(-)(-)(+) = +
ac	+	-	+	(+)(-) = -	+	-	(+)(-)(+) = -
bc	-	+	+	(-) (+) = -	-	+	(-)(+)(+) = -
abc	+	+	+	(+)(+) = +	+	+	(+)(+)(+) = +

Tabla 7.2. Tabla de signos para el diseño 2^3

2.- Calcular los contrastes de los efectos.

El contraste se define como el efecto total, es decir el efecto del factor cuando está en el nivel alto menos el efecto del factor cuando está en el nivel bajo. Por ejemplo, para calcular el contraste del factor A, observamos que el factor A esta en el nivel alto, en las combinaciones representadas por los códigos a, ab, ac y abc y está en el nivel bajo en las combinaciones con los códigos (1), b, c y bc, entonces el contraste del factor A lo podemos calcularlo a través de la siguiente ecuación:

$$\text{Contraste (A)} = [(a + ab + ac + abc) - ((1) + b + c + bc)]$$

$$= [a + ab + ac + abc - (1) - b - c - bc]$$

Otra forma de obtener los contrastes es a través de la tabla de los signos construida anteriormente, para ello multiplicamos la columna de los códigos (de la tabla de signos) de cada combinación por la columna de los signos del factor A, como se muestra en la siguiente tabla:

Códigos	A	Contraste (A) = (código) X (A)
(1)	-	- (1)
a	+	+ a
b	-	- b
ab	+	+ ab
c	-	- c
ac	+	+ ac
bc	-	- bc
abc	+	+ abc

Tabla 7.3. Tabla de signos para la construcción del contraste del factor A

Colocamos el resultado de la multiplicación de los códigos por los signos del factor A en una ecuación (tercer columna de la tabla 7.3) y se obtiene lo siguiente:

Contraste (A) = [- (1) + a – b +ab – c + ac – bc + abc]

Y reacomodando los signos resulta:

Contraste (A) = [a + ab +ac + abc – (1) – b – c – bc]

Tomando los valores del problema, sustituimos los totales correspondientes de cada código, obtenemos el valor del contraste del factor A, como se muestra en seguida:

Contraste (A) = [51.2 + 84.9 + 44.9 + 76.2 – 37.1 – 30.4 – 27.3 – 29.3] = [133.1]

Calcularemos los contrastes de los demás factores e interacciones utilizando la tabla de signos (tabla 7.2)

Contraste (B) = [b + ab + bc + abc – (1) – a – c – ac]

= [30.4 + 84.9 + 29.3 + 76.2 – 37.1 – 51.2 – 27.3 – 44.9] = [60.3]

Contraste (C) = [c + ac + bc + abc – (1) – a – b – ab]

= [27.3 + 44.9 + 29.3 + 76.2 –37.1– 51.2 – 30.4 – 84.9] = [-25.9]

Contraste (AB) = [(1) + ab + c + abc – a – b – ac – bc]

= [37.1 + 84.9 + 27.3 + 76.2 – 51.2 – 30.4 – 44.9 – 29.3] = [69.7]

Contraste (AC) = [(1) + b + ac + abc – a – ab – c – bc]

= [37.1 +30.4 + 44.9 + 76.2 – 51.2 – 84.9 – 27.3 – 29.3] = [-4.1]

Contraste (BC) = [(1) + a + bc + abc – b – ab – c – ac]

= [37.1 +51.2 + 29.3 + 76.2 – 30.4 – 84.9 – 27.3 – 44.9] =[6.3]

Contraste (ABC) = [a + b + c + abc – (1) – ab – ac – bc]

[51.2 + 30.4 + 27.3 + 76.2 – 37.1 – 84.9 – 44.9 – 29.3] = [-11.1]

2.- Cálculo de los efectos promedios.

Utilizando las ecuaciones de los contrastes, obtenemos los efectos promedios mediante las siguientes ecuaciones.

Efecto promedio (A) = CONTRASTE (A) /4n
= [b + ab + bc + abc – (1) – a – c – ac]/ 4n
= [133.1]/(4)(2)
= 16.63

EFecto promedio (B) = CONTRASTE (B) /4n
= [b + ab + bc + abc – (1) – a – c – ac] / 4n
= [60.3]/(4)(2)
= 7.53

Efecto promedio (C) = CONTRASTE (C) /4n
= [c + ac + bc + abc – (1) – a – b – ab]/4n
= [-25.9]/(4)(2)
= -3.23

Efecto promedio (AB) = CONTRASTE (AB) /4n
= [(1) + ab + c + abc – a – b – ac – bc] /4n
= [69.7]/(4)(2)
= 8.71

Efecto promedio (AC) = CONTRASTE (AC) /4n
= [(1) + b + ac + abc – a – ab – c – bc]/4n

= [-4.1]/(4)(2)
= -0.51

Efecto promedio (BC) = CONTRASTE (BC) /4n
= [(1) + a + bc + abc – b – ab – c – ac]/4n
= [6.3]/(4)(2)
= 0.78

Efecto promedio (ABC) = CONTRASTE (ABC) /4n
= [a + b + c + abc – (1) – ab – ac – bc] /4n
= [–11.1]/(4)(2)
= -1.38

En la siguiente tabla se presenta el resumen de los resultados obtenidos:

Efecto	Estimado
promedio	23.8312
A:Rapidez	16.6375
B:Configuración	7.5375
C:Ángulo	-3.2375
AB	8.7125
AC	-0.5125
BC	0.7875
ABC	-1.3875

Tabla 7.4. Tabla de efectos promedios.

3.- La sumas de cuadrados de los efectos.

La suma de cuadrados totales la obtendremos mediante la siguiente ecuación:

$$SC_{TOTALES}=\sum_{i=1}^{2}\sum_{j=1}^{2}\sum_{k=1}^{2}\sum_{l=1}^{2} y^2_{ijkl} - \frac{y^2_{....}}{abcn}$$

$$= (18.2)^2 + (27.2)^2 + \ldots. + (36.3)^2 + (18.9)^2 + (24.0)^2 + \ldots + (39.9)^2 - \frac{381.3^2}{16}$$

$$= 10{,}796.69 - 9086.85$$

$$= 1709.834375$$

Y la suma de cuadrados para los factores e interacciones lo haremos mediante las siguientes ecuaciones:

$\mathbf{SC_A}$ = [CONTRASTE (A)]^2 /8n
= [b + ab + bc + abc – (1) – a – c – ac]^2 / 8n
= [133.1]^2 /(8)(2)
= 1107.225625

$\mathbf{SC_B}$ = [CONTRASTE (B)]^2 /8n
= [b + ab + bc + abc – (1) – a – c – ac]^2 / 8n
= [60.3]^2 /(8)(2)
= 227.255625

$\mathbf{SC_C}$ = [CONTRASTE (C)]^2 /8n
= [c + ac + bc + abc – (1) – a – b – ab]^2/8n
= [-25.9]^2/(8)(2)
= 41.925625

$\mathbf{SC_{AB}}$ = [CONTRASTE (AB)]^2 /8n
= [(1) + ab + c + abc – a – b – ac – bc]^2 /8n
= [69.7]^2/(8)(2)
= 303.630625

$\mathbf{SC_{AC}}$ = [CONTRASTE (AC)]^2 /8n
= [(1) + b + ac + abc – a – ab – c – bc]^2 /8n
= [-4.1]^2/(8)(2)
= 1.050625

$\mathbf{SC_{BC}}$ = [CONTRASTE (BC)]^2 /8n
= [(1) + a + bc + abc – b – ab – c – ac]^2 / 8n
= [6.3]^2/(8)(2)
= 2.480625

$\mathbf{SC_{ABC}}$ = [CONTRASTE (ABC)]^2 /8n
= [a + b + c + abc – (1) – ab – ac – bc]^2 /8n
= [11.1]^2/(4)(2)
= 7.700625

La suma de cuadrados del error lo obtendremos por diferencia.

$SC_{ERROR} = SC_{TOTAL} - SC_A - SC_B - SC_C - SC_{AB} - SC_{AC} - SC_{BC} - SC_{ABC}$

$SC_{ERROR} = 1709.834375 - 1107.225625 - 227.255625 - 41.925625 - 303.630625 - 1.050625 - 2.480625 - 7.700625$

$SC_{ERROR} = 18.565$

4. Grados de libertad.

Los grados de libertad los podemos obtener por las fórmulas que se muestran en la siguiente tabla:

Fuente de variación	Grados de libertad	Grados de libertad para el ejemplo
A	a − 1	2−1 =1
B	b − 1	2−1=1
C	c − 1	2−1=1
AB	(a−1)(b−1)	1x1=1
AC	(a−1)(c−1)	1x1=1
BC	(b−1)(c−1)	1x1=1
ABC	(a−1)(b−1)(c−1)	1x1x1=1
Error	abc(n−1)	2x2x2x1=8
Total	abn-1	16−1=15

Tabla 7.5. Tabla de grados de libertad

5.- Cuadrados medios

Para obtener los cuadrados medios, dividimos las sumas de cuadrados de cada efecto por sus grados de libertad respectivos, como se muestra a continuación:

Cuadrado medio del factor A (CM_A) = $SC_A/a-1$

Cuadrado medio del factor B (CM_B) = $SC_B/b-1$

Cuadrado medio del factor C (CM_C) = $SC_C/c-1$

Cuadrado medio de la interacción AB (CM_{AB}) = $SC_{AB}/(a-1)(b-1)$

Cuadrado medio de la interacción AC (CM_{AC}) = $SC_{AC}/(a-1)(c-1)$

Cuadrado medio de la interacción BC (CM_{BC}) = $SC_{BC}/(b-1)(c-1)$

Cuadrado medio de la interacción ABC (CM_{ABC}) = $SC_{ABC}/(a-1)(b-1)(c-1)$

Cuadrado medio del error (CM_{Error}) = $SC_{ERROR}/abc(n-1)$

Sustituyendo los valores correspondientes en las fórmulas tenemos que:

$CM_A = 1107.22563/1=1107.22563$

$CM_B = 227.255625/1=227.255625$

$CM_C = 41.925625/1=41.925625$

$CM_{AB} = 303.630625/1=303.630625$

$CM_{AC} = 1.050625/1=1.050625$

$CM_{BC} = 2.480625/1=2.480625$

$CM_{ABC} = 7.700625/1=7.700625$

$CM_{Error} = 18.565/8=2.32063$

Observemos que debido a que los grados de libertad de los efectos de estudio son uno, la suma de cuadrados es igual a los cuadrados medios.

6. Calculo de la F

El valor del estadístico de prueba (F- calculada) de cada efecto, lo obtenemos dividiendo el cuadrado medio del efecto entre el cuadrado medio del error, como se muestra en la tabla siguiente.

Efecto	$F_{CALCULADA}$
A	$CM_A / CM_{error} = 1107.22563/2.32063=477.12$
B	$CM_B / CM_{error} = 227.255625/2.32063=97.93$
C	$CM_C / CM_{error} = 41.925625/2.32063=18.07$
AB	$CM_{AB} / CM_{error} = 303.630625/2.32063=130.84$
AC	$CM_{AC} / CM_{error} = 1.050625/2.32063=0.45$
BC	$CM_{BC} / CM_{error} = 2.480625/2.32063= 1.07$
ABC	$CM_{ABC} / CM_{error} = 7.700625/2.32063=3.32$

Tabla 7.6. Tabla de la F calculada.

7. TAbla de ANOVA.

Con los resultados anteriores, podemos construir la tabla de ANOVA.

Fuente	Suma de Cuadrados	Gl	Cuadrado Medio	Razón-F	Fα
A:Rapidez	1107.22563	1	1107.23	477.12	5.32
B:Configuración	227.255625	1	227.256	97.93	
C:Ángulo	41.925625	1	41.9256	18.07	
AB	303.630625	1	303.631	130.84	
AC	1.050625	1	1.05063	0.45	
BC	2.480625	1	2.48063	1.07	
ABC	7.700625	1	7.70063	3.32	
Error total	18.565	8	2.32063		
Total (corr.)	1709.83438	15			

Tabla 7.7. Tabla de ANOVA.

8. Cálculo de las F_{tablas}

Para todos los efectos con un grado de libertad en el numerador y 8 en el denominador, con un α=0.05. el valor de la Ftablas es 5.32 (ver apéndice A).

9. Conclusiones del ANOVA

Rechazamos las hipótesis nulas para los efectos que resultaron con una F calculada mayor a Fα.

Tomando en cuento esto, podemos concluir que:

Son significativos los efectos de la rapidez de corte (A); la configuración (B); el ángulo de corte(C); y la interacción de la rápidez y la configuración(AB).

10. Análisis complementarios

Gráficas de efectos promedio para los efectos simples significativos

Es recomendable graficar los efectos simples que resultaron significativos para visualizar el efecto del factor, para ello es necesario calcular los promedios de cada efecto en el nivel alto y bajo, por ejemplo para el factor A, observamos que en cuatro combinaciones está en el nivel bajo éstas son representadas por los códigos (1), b, c y bc; y está en el nivel alto en: a, ab, ac y abc, con esto calculamos:

El promedio cuando A esta en el nivel bajo $= \dfrac{(1)+b+c+bc}{4n}$

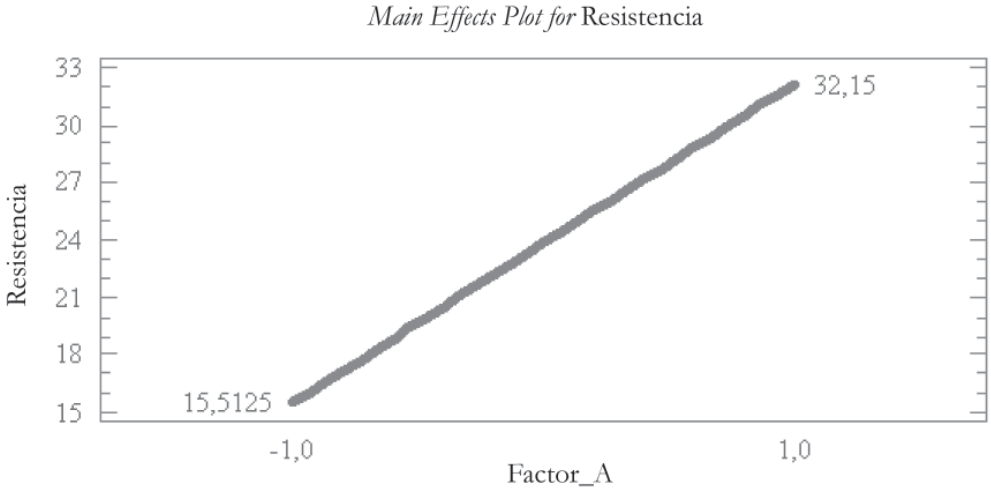
$$= \frac{37.1+30.4+27.3+29.3}{4*2} = 15.51$$

El promedio cuando A esta en el nivel alto $= \frac{a + ab + ac + abc}{4n}$

$$= \frac{51.2 + 84.9 + 44.9 + 76.2}{4 * 2} = 32.15$$

Tabla de resultados para la rapidez de corte (FACTOR A)

nivel	media
-	15.51
+	32.15



Interpretación:

- Existe un efecto positivo: cuando se cambia la rapidez de corte de nivel bajo a nivel alto se obtiene una mayor resistencia.
- Se recomienda usar el nivel alto de la rapidez de corte para obtener mayor resistencia.

Gráfica de promedios para la configuración (factor B)

Como se hizo con el factor A, calculamos los promedios del factor B cuando está en el nivel alto y bajo, mediante las siguientes fórmulas:

El promedio de B cuando está en el nivel bajo $= \dfrac{(1)+a+c+ac}{4n}$

$$= \frac{37.1+51.2+27.3+44.9}{4*2} = 20.06$$

El promedio de B cuando está en el nivel alto $= \dfrac{b+ab+bc+abc}{4n}$

$$= \frac{30.4+84.9+29.3+76.2}{4*2} = 27.6$$

Tabla de resultados para la configuración (FACTOR B)

Nivel	media
-	20.06
+	27.6

Interpretación:

- Se observa un efecto positivo, cuando se cambia de nivel bajo a nivel ato se obtiene mayor resistencia.
- Se recomienda usar nivel alto de configuración para obtener mayor resistencia.

Gráfica de promedios para el ángulo de corte (factor C)

Como se hizo con el factor A y el factor B, calculamos los promedios del factor C cuando está en el nivel alto y bajo, mediante las siguientes fórmulas:

El promedio de C cuando está en el nivel bajo $= \dfrac{(1)+a+b+ab}{4n}$

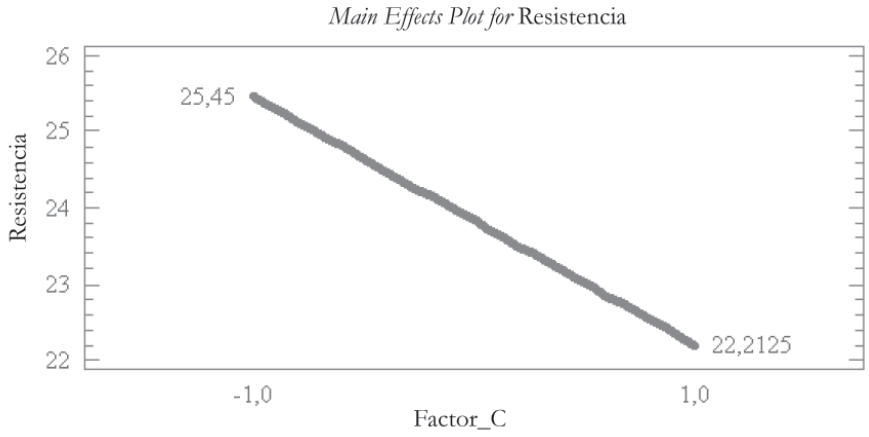
$$= \frac{37.1+51.2+30.4+84.9}{4*2} = 25.45$$

El promedio de C cuando está en el nivel alto $= \dfrac{c+ac+bc+abc}{4n} =$

$$= \frac{27.3+44.9+29.3+76.2}{4*2} = 22.21$$

Tabla de resultados para la configuración del ángulo de corte

Nivel	media
-	25.45
+	22.21



Interpretación:

- Se observa un efecto negativo cuando se cambia la configuración del ángulo de corte de nivel bajo a nivel alto disminuye la resistencia.

- Se recomienda usar nivel bajo de la configuración del ángulo.

Gráfica de interacción AB

Para realizar la gráfica de interacción es necesario calcular el efecto promedio de las cuatro combinaciones de los factores A y B, de la siguiente manera:

Efecto del factor A en el nivel bajo (A^-) y factor B en el nivel bajo (B^-) es igual a,

$$A^- \text{ y } B^- = \frac{(1)+c}{2n} = \frac{37.1+27.3}{2(2)} = 16.1$$

De igual manera procedemos para las demás combinaciones:

$$A^+ \text{ y } B^- = \frac{a+ac}{2n} = \frac{51.2+44.9}{2(2)} = 24.03$$

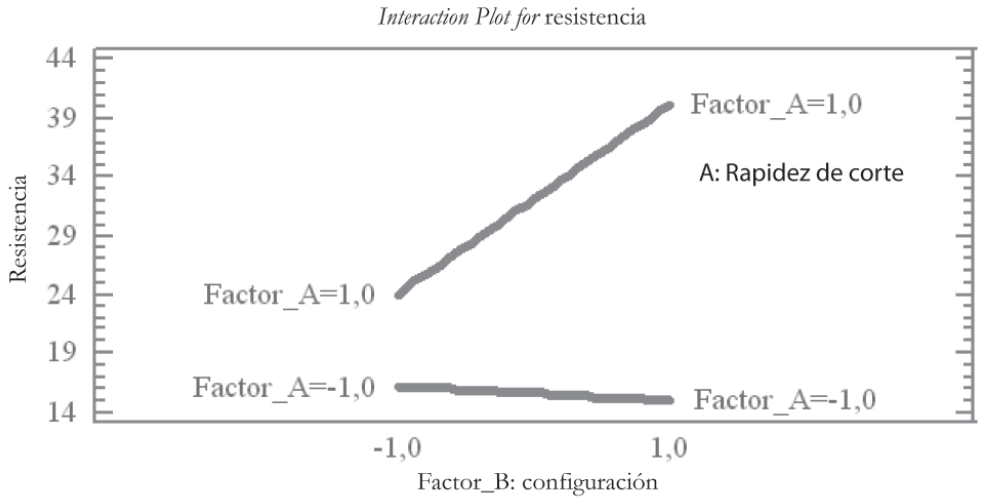
$$A^- \text{ y } B^+ = \frac{b+bc}{2n} = \frac{30.4+29.3}{2(2)} = 14.92$$

$$A^+ \text{ y } B^+ = \frac{ab+abc}{2n} = \frac{84.9+76.2}{2(2)} = 40.27$$

Una vez obtenido estos resultados, se grafican los puntos en un primer cuadrante, como se muestra en la siguiente gráfica.

Tabla de resultados de la interacción entre la rapidez de corte y configuración

	A	
B	-	+
-	16.1	24.03
+	14.92	40.27



Interpretación:

- Si se trabaja en el nivel bajo de la rapidez de corte y se cambia de nivel bajo a nivel alto la configuración se observa que no hay un cambio notable en la resistencia.
- Si se trabaja en el nivel alto de la rapidez de corte y se cambia del nivel bajo a nivel alto en la configuración se nota un incremento en la resistencia.
- Se recomienda usar nivel alto de la rapidez de corte y el nivel alto de la configuración.

11. Conclusion y recomendación

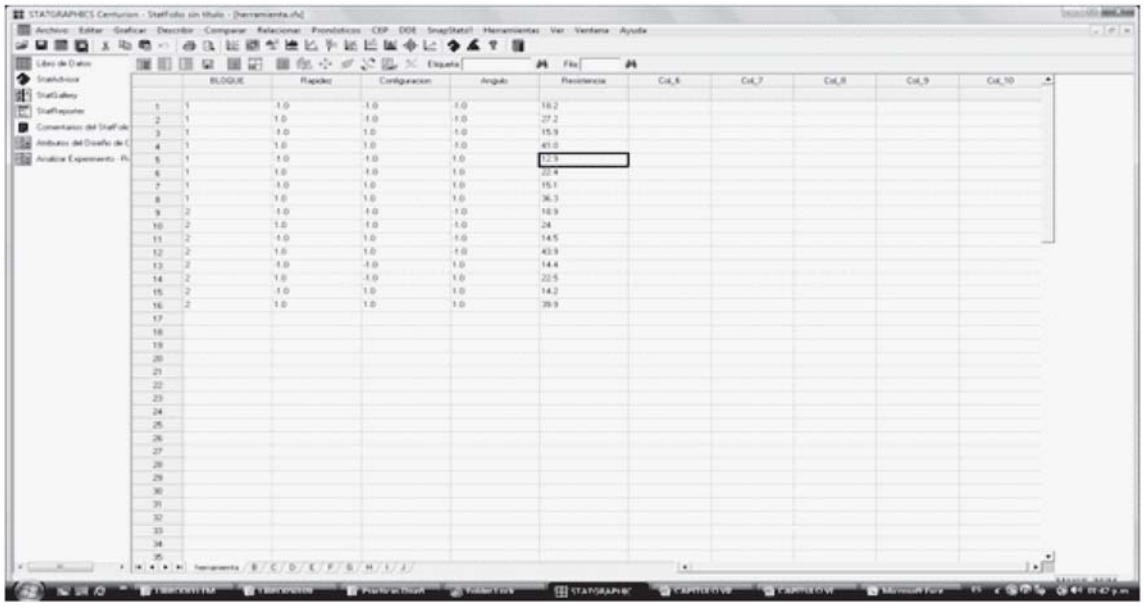
Por los resultados obtenidos anteriormente se puede concluir que:

Los efectos significativos son: rapidez de corte, configuración, ángulo de corte y la interacción de rapidez de corte y la configuración, con base a las gráficas de los efectos promedios de A, B, y C y la gráfica de interacción AB los niveles recomendados para obtener mayor resistencia son nivel alto de rapidez de corte, nivel alto de configuración y el nivel bajo del ángulo de corte.

7.4 Captura de datos y salida de resultados del ejemplo

7.1 usando el *statgraphics centurion XV*

7.4.1 Captura de datos en el *Statgraphics*



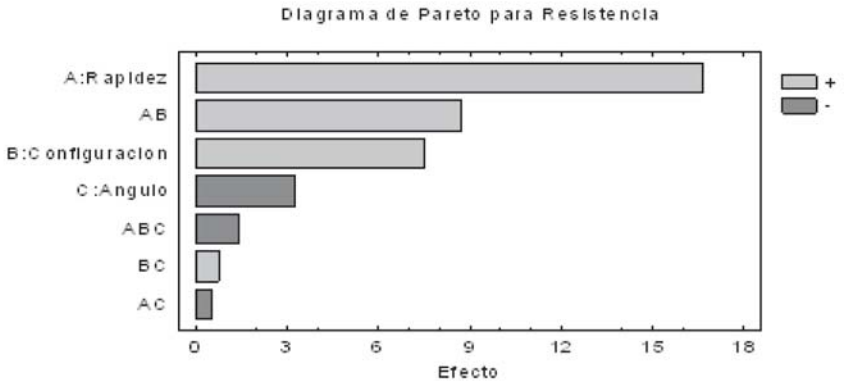
7.4.2 Efectos promedio

Efectos estimados para Resistencia

Efecto	Estimado	Error Estd.	V.I.F.
promedio	23.8312	0.38084	
A:Rapidez	16.6375	0.76168	1.0
B:Configuración	7.5375	0.76168	1.0
C:Ángulo	-3.2375	0.76168	1.0
AB	8.7125	0.76168	1.0
AC	-0.5125	0.76168	1.0
BC	0.7875	0.76168	1.0
ABC	-1.3875	0.76168	1.0

Errores estándar basados en el error total con 8 g.l.

7.4.3 Pareto normal



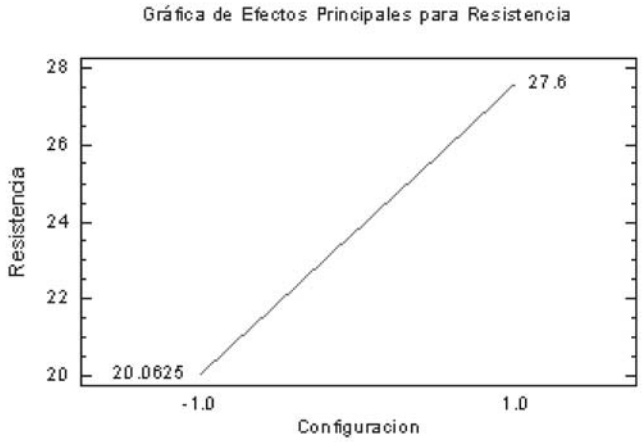
7.4.4 Tabla de Anova

Fuente	Suma de Cuadrados	Gl	Cuadrado Medio	Razón-F	Valor-P
A:Rapidez	1107.23	1	1107.23	477.12	0.0000
B:Configuración	227.256	1	227.256	97.93	0.0000
C:Ángulo	41.9256	1	41.9256	18.07	0.0028
AB	303.631	1	303.631	130.84	0.0000
AC	1.05063	1	1.05063	0.45	0.5200
BC	2.48063	1	2.48063	1.07	0.3314
ABC	7.70063	1	7.70063	3.32	0.1060
Error total	18.565	8	2.32063		
Total (corr.)	1709.83	15			

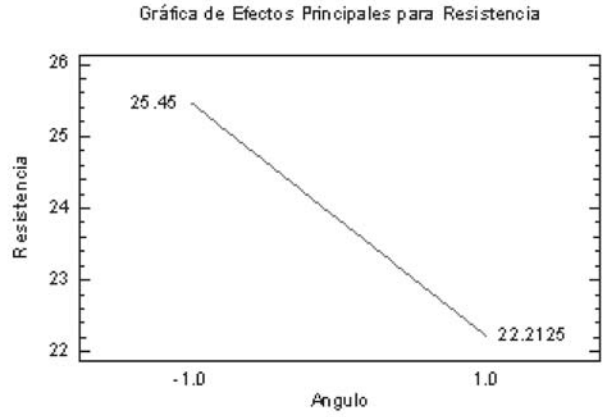
7.4.5 Gráficas de efectos principales

7.4.5.1 Gráfica para rapidez

7.4.5.2 Gráfica para concentración

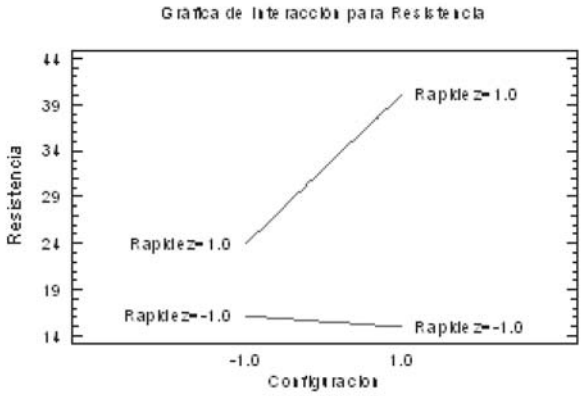


7.4.5.3 Gráfica para ángulo



7.4.6. Gráficas de interacciones significativas

7.4.6.1 Gráfica de interacción Rapidez-Configuración



7.5 Ejercicios

Práctica 7.5.1. Un ingeniero está interesado en el efecto de la velocidad de corte (A), la dureza del metal (B), y el ángulo del corte (C) sobre la duración de una herramienta de corte. Para ello se eligen dos niveles para cada factor y se corren dos réplicas del diseño factorial . La tabla siguiente presenta los datos del tiempo de duración (en horas) de la herramienta.

Codigo	Factores			Réplicas	
	A	B	C	I	II
	-	-	-	221	311
	+	-	-	325	435
	-	+	-	354	348
	+	+	-	552	472
	-	-	+	440	453
	+	-	+	406	377
	-	+	+	605	500
	+	+	+	392	419

a) Obtenga el Pareto normal e interprete.
b) Obtenga el ANOVA e intérprete, use α=0.05.
c) Realice los análisis complementarios y establezca conclusiones.

Práctica 7.5.2. Un ingeniero esta interesado en el efecto que tiene la rapidez de corte (A), la configuración (B) y el ángulo de corte (C) sobre la duración de una herramienta. Se eligen dos niveles de cada factor y se realiza un diseño factorial con n=3. Los resultados se muestran a continuación:

Código	Factores			Réplicas		
	A	B	C	I	II	III
	-	-	-	22	31	25
	+	-	-	32	43	29
	-	+	-	35	34	50
	+	+	-	55	47	46
	-	-	+	44	45	38
	+	-	+	40	37	36
	-	+	+	60	50	54
	+	+	+	39	41	47

a) Obtenga el Pareto normal e interprete.
b) Obtenga el ANOVA e intérprete, use α=0.05.
c) Realice los análisis complementarios y establezca conclusiones.

Práctica 7.5.3. Se utiliza una aleación de níquel y titanio en la fabricación de componentes para turbinas de aviones. La formación de grietas es un problema potencialmente grave en la parte final, ya que puede dar por resultado una falla irreversible. Se realiza una prueba en las instalaciones del fabricante de las partes a fin de determinar el efecto de tres factores sobre las grietas. Los tres factores son temperatura de vertido (A), contenido de Titanio (B) y método de tratamiento térmico. Se corren dos réplicas de un diseño y se mide la longitud de las grietas (en mm) inducidas en una probeta sometida a una prueba estándar. Los datos se muestran enseguida:

Código	Factores			Réplicas	
	A	B	C	I	II
	-	-	-	1.71	1.91
	+	-	-	1.42	1.48
	-	+	-	1.35	1.53
	+	+	-	1.67	1.55
	-	-	+	1.23	1.38
	+	-	+	1.25	1.26
	-	+	+	1.46	1.42
	+	+	+	1.29	1.27

a) Obtenga el Pareto normal e interprete.
b) Obtenga el ANOVA e intérprete, use α=0.05.
c) Realice los análisis complementarios y establezca conclusiones.

Anexo

Apéndices

Apendice A: Valores críticos de la distribución F.

				Valores Críticos de la Distribución F a un nivel de significancia								1%				
	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	12	15	20	24	30	40
1	4052	5000	5403	5625	5764	5859	5928	5981	6022	6056	6106	6157	6209	6235	6261	6287
2	98.50	99.00	99.20	99.22	99.30	99.32	99.40	99.41	99.42	99.43	99.44	99.45	99.47	99.50	99.52	99.53
3	34.10	30.80	29.50	28.70	28.20	27.90	27.70	27.50	27.30	27.20	27.10	26.90	26.70	26.60	26.50	28.40
4	21.20	18.00	16.70	16.00	15.50	15.20	15.00	14.80	14.70	14.50	14.40	14.20	14.00	13.90	13.80	13.70
5	16.30	13.30	12.10	11.40	11.00	10.70	10.50	10.30	10.20	10.10	9.89	9.72	9.55	9.47	9.38	9.29
6	13.70	10.90	9.78	9.15	8.75	8.47	8.26	8.10	7.98	7.87	7.72	7.56	7.40	7.31	7.23	7.14
7	12.20	9.55	8.45	7.85	7.46	7.19	6.99	6.84	6.72	6.62	6.47	6.31	6.16	6.07	5.99	5.91
8	11.30	8.65	7.59	7.01	6.63	6.37	6.18	6.03	5.91	8.81	5.67	5.52	5.36	5.28	5.20	5.12
9	10.60	8.02	6.99	6.42	6.06	5.80	5.61	5.47	5.35	5.26	5.11	4.96	4.81	4.73	4.65	4.57
10	10.00	7.56	6.55	5.99	5.64	5.39	5.20	5.08	4.94	4.85	4.71	4.56	4.41	4.33	4.25	4.17
11	9.65	7.21	6.22	5.67	5.32	5.07	4.89	4.74	4.63	4.54	4.40	4.25	4.10	4.02	3.94	3.86
12	9.33	6.93	5.95	5.41	5.06	4.82	4.64	4.50	4.39	4.30	4.16	4.01	3.86	3.78	3.70	3.62
13	9.07	6.70	5.74	5.21	4.86	4.62	4.44	4.30	4.19	4.10	3.96	3.82	3.66	3.59	3.51	3.43
14	8.86	6.51	5.56	5.04	4.69	4.46	4.28	4.14	4.03	3.94	3.80	3.66	3.51	3.43	3.35	3.27
15	8.68	6.36	5.42	4.89	4.56	4.32	4.14	4.00	3.89	3.80	3.67	3.52	3.37	3.29	3.21	3.13
16	8.53	6.23	5.29	4.77	4.44	4.20	4.03	3.89	3.78	3.69	3.55	3.41	3.26	3.18	3.10	3.02
17	8.40	6.11	5.18	4.67	4.34	4.10	3.93	3.79	3.68	3.59	3.46	3.31	3.16	3.08	3.00	2.92
18	8.29	6.01	5.09	4.58	4.25	4.01	3.84	3.71	3.60	3.51	3.37	3.23	3.08	3.00	2.92	2.84
19	8.18	5.93	5.01	4.50	4.17	3.94	3.77	3.63	3.52	3.43	3.30	3.15	3.00	2.92	2.84	2.76
20	8.10	5.85	4.94	4.43	4.10	3.87	3.70	3.59	3.46	3.37	3.23	3.09	2.94	2.86	2.78	2.69
21	8.02	5.78	4.87	4.37	4.04	3.81	3.64	3.51	3.40	3.31	3.17	3.03	2.88	2.80	2.72	2.64
22	7.95	5.72	4.82	4.31	3.99	3.76	3.59	3.45	3.35	3.26	3.12	2.98	2.83	2.75	2.67	2.58
23	7.88	5.66	4.76	4.26	3.94	3.71	3.54	3.41	3.30	3.21	3.07	2.93	2.78	2.70	2.62	2.54
24	7.82	5.61	4.72	4.22	3.90	3.67	3.50	3.36	3.26	3.17	3.03	2.89	2.74	2.66	2.58	2.49
25	7.77	5.57	4.68	4.18	3.85	3.63	3.46	3.32	3.22	3.13	2.99	2.85	2.70	2.62	2.54	2.45
26	7.72	5.53	4.64	4.14	3.82	3.59	3.42	3.29	3.18	3.09	2.96	2.81	2.66	2.58	2.50	2.42
27	7.68	5.49	4.60	4.11	3.78	3.56	3.39	3.26	3.15	3.06	2.93	2.78	2.63	2.55	2.47	2.38
28	7.64	5.45	4.57	4.07	3.75	3.53	3.36	3.23	3.12	3.03	2.90	2.75	2.60	2.52	2.44	2.34
29	7.60	5.42	4.54	4.04	3.73	3.50	3.33	3.20	3.09	3.00	2.87	2.73	2.57	2.49	2.41	2.33
30	7.56	5.39	4.51	4.02	3.70	3.47	3.30	3.17	3.07	2.98	2.84	2.70	2.55	2.47	2.39	2.30
40	7.31	5.18	4.31	3.83	3.51	3.29	3.12	2.99	2.89	2.80	2.66	2.52	2.37	2.29	2.20	2.11
60	7.08	4.98	4.13	3.65	3.34	3.12	2.95	2.82	2.72	2.63	2.50	2.35	2.20	2.12	2.03	1.94
120	6.85	4.79	3.95	3.48	3.17	2.96	2.79	2.66	2.56	2.47	2.34	2.19	2.03	1.95	1.86	1.76
∞	6.63	4.61	3.78	3.32	3.02	2.80	2.64	2.51	2.41	2.32	2.18	2.04	1.88	1.79	1.70	1.59

	Valores Críticos de la Distribución F a un nivel de significancia 5%															
	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	12	15	20	24	30	40
1	161	200	216	225	230	234	237	239	241	242	244	246	248	249	250	251
2	18.5	19	19.2	19.2	19.3	19.33	19.35	19.37	19.38	19.4	19.43	19.44	19.45	19.46	19.47	19.49
3	10.10	9.55	9.28	9.12	9.01	8.94	8.89	8.85	8.81	8.79	8.74	8.70	8.66	8.64	8.62	8.59
4	7.71	6.94	6.59	6.39	6.26	6.16	6.09	6.04	6.00	5.96	5.91	5.86	5.80	5.77	5.75	5.72
5	6.61	5.79	5.41	5.19	5.05	4.95	4.88	4.82	4.77	4.74	4.68	4.62	4.56	4.53	4.50	4.46
6	5.99	5.14	4.76	4.53	4.39	4.28	4.21	4.15	4.10	4.06	4.00	3.94	3.87	3.84	3.81	3.77
7	5.59	4.74	4.35	4.12	3.97	3.87	3.79	3.73	3.68	5.64	3.57	3.51	3.44	3.41	3.38	3.34
8	5.32	4.46	4.07	3.84	3.69	3.58	3.50	3.44	3.39	3.35	3.28	3.22	3.15	3.12	3.08	3.04
9	5.12	4.26	3.86	3.63	3.48	3.37	3.29	3.23	3.18	3.14	3.07	3.01	2.94	2.90	2.86	2.83
10	4.96	4.10	3.71	3.48	3.33	3.22	3.14	3.07	3.02	2.98	2.91	2.85	2.77	2.74	2.70	2.66
11	4.84	3.98	3.59	3.36	3.20	3.09	3.01	2.95	2.90	2.85	2.79	2.72	2.65	2.61	2.57	2.53
12	4.75	3.89	3.49	3.26	3.11	3.00	2.91	2.85	2.80	2.75	2.69	2.62	2.54	2.51	2.47	2.43
13	4.67	3.81	3.41	3.18	3.03	2.92	2.83	2.77	2.71	2.67	2.60	2.53	2.46	2.42	2.38	2.34
14	4.60	3.74	3.34	3.11	2.96	2.85	2.76	2.70	2.65	2.60	2.53	2.46	2.39	2.35	2.31	2.27
15	4.54	3.68	3.29	3.06	2.90	2.79	2.71	2.64	2.59	2.54	2.48	2.40	2.33	2.29	2.25	2.20
16	4.49	3.63	3.24	3.01	2.85	2.74	2.66	2.59	2.54	2.49	2.42	2.35	2.28	2.24	2.19	2.15
17	4.45	3.59	3.20	2.96	2.81	2.70	2.61	2.55	2.49	2.45	2.38	2.31	2.23	2.19	2.15	2.10
18	4.41	3.55	3.16	2.93	2.77	2.66	2.58	2.51	2.46	2.41	2.34	2.27	2.19	2.15	2.11	2.06
19	4.38	3.52	3.13	2.90	2.74	2.63	2.54	2.48	2.42	2.38	2.31	2.23	2.16	2.11	2.07	2.03
20	4.35	3.49	3.10	2.87	2.71	2.60	2.51	2.45	2.39	2.35	2.28	2.20	2.12	2.08	2.04	1.99
21	4.32	3.47	3.07	2.84	2.68	2.57	2.49	2.42	2.37	2.32	2.25	2.18	2.10	2.05	2.01	1.96
22	4.30	3.44	3.05	2.82	2.66	2.55	2.46	2.40	2.34	2.30	2.23	2.15	2.07	2.03	1.98	1.94
23	4.28	3.42	3.03	2.80	2.64	2.53	2.44	2.37	2.32	2.27	2.20	2.13	2.05	2.01	1.96	1.91
24	4.26	3.40	3.01	2.78	2.62	2.51	2.42	2.36	2.30	2.25	2.18	2.11	2.03	1.98	1.94	1.89
25	4.24	3.39	2.99	2.76	2.60	2.49	2.40	2.34	2.28	2.24	2.16	2.09	2.01	1.96	1.92	1.87
26	4.23	3.37	2.99	2.74	2.59	2.47	2.39	2.32	2.27	2.22	2.16	2.09	1.99	1.95	1.90	1.85
27	4.21	3.35	2.98	2.73	2.57	2.46	2.37	2.31	2.25	2.20	2.15	2.07	1.97	1.93	1.88	1.84
28	4.20	3.34	2.96	2.71	2.56	2.45	2.36	2.29	2.24	2.19	2.13	2.06	1.96	1.91	1.87	1.82
29	4.18	3.33	2.95	2.70	2.55	2.43	2.35	2.28	2.22	2.18	2.12	2.04	1.94	1.90	1.85	1.81
30	4.17	3.32	2.92	2.69	2.53	2.42	2.33	2.27	2.21	2.16	2.09	2.01	1.93	1.89	1.84	1.79
40	4.08	3.23	2.84	2.61	2.45	2.34	2.25	2.18	2.12	2.08	2.00	1.92	1.84	1.79	1.74	1.69
60	4.00	3.15	2.76	2.53	2.37	2.23	2.17	2.10	2.04	1.99	1.92	1.84	1.75	1.70	1.65	1.59
120	3.92	3.07	2.68	2.45	2.29	2.18	2.09	2.02	1.96	1.91	1.83	1.75	1.66	1.61	1.55	1.50
∞	3.84	3.00	2.60	2.37	2.21	2.10	2.01	1.94	1.88	1.83	1.75	1.67	1.57	1.52	1.46	1.39

	Valores Críticos de la Distribución F a un nivel de significancia 10%															
	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	12	15	20	24	30	40
1	39.86	49.5	53.59	55.83	57.24	58.2	58.91	59.44	59.86	60.19	60.71	61.22	61.74	62	62.26	62.53
2	8.53	9.00	9.16	9.24	9.29	9.33	9.35	9.37	9.38	9.39	9.41	9.42	9.44	9.45	9.46	9.47
3	5.54	5.46	5.39	5.34	5.31	5.28	5.27	5.25	5.24	5.23	5.22	5.20	5.18	5.18	5.17	5.16
4	4.54	4.32	4.19	4.11	4.05	4.01	3.98	3.95	3.94	3.92	3.90	3.87	3.84	3.83	3.82	3.80
5	4.06	3.78	3.62	3.52	3.45	3.40	3.37	3.34	3.32	3.30	3.27	3.24	3.21	3.19	3.17	3.16
6	3.78	3.46	3.29	3.18	3.11	3.05	3.01	2.98	2.96	2.94	2.90	2.87	2.84	2.82	2.80	2.78
7	3.59	3.26	3.07	2.96	2.88	2.83	2.78	2.75	2.72	2.70	2.67	2.63	2.59	2.58	2.56	2.54
8	3.46	3.11	2.92	2.81	2.73	2.67	2.62	2.59	2.56	2.54	2.50	2.46	2.42	2.40	2.38	2.36
9	3.36	3.01	2.81	2.69	2.61	2.55	2.51	2.47	2.44	2.42	2.38	2.34	2.30	2.28	2.25	2.23
10	3.29	2.92	2.73	2.61	2.52	2.46	2.41	2.38	2.35	2.32	2.28	2.24	2.20	2.18	2.16	2.13
11	3.23	2.86	2.66	2.54	2.45	2.39	2.34	2.30	2.27	2.25	2.21	2.17	2.12	2.10	2.08	2.05
12	3.18	2.81	2.61	2.48	2.39	2.33	2.28	2.24	2.21	2.19	2.15	2.10	2.06	2.04	2.01	1.99
13	3.14	2.76	2.56	2.43	2.35	2.28	2.23	2.20	2.16	2.14	2.10	2.05	2.01	1.98	1.96	1.93
14	3.10	2.73	2.52	2.39	2.31	2.24	2.19	2.15	2.12	2.10	2.05	2.01	1.96	1.94	1.91	1.89
15	3.07	2.70	2.49	2.36	2.27	2.21	2.16	2.12	2.09	2.06	2.02	1.97	1.92	1.90	1.87	1.85
16	3.05	2.67	2.46	2.33	2.24	2.18	2.13	2.09	2.06	2.03	1.99	1.94	1.89	1.87	1.84	1.81
17	3.03	2.64	2.44	2.31	2.22	2.15	2.10	2.06	2.03	2.00	1.96	1.91	1.86	1.84	1.81	1.78
18	3.01	2.62	2.42	2.29	2.20	2.13	2.08	2.04	2.00	1.98	1.93	1.89	1.84	1.81	1.78	1.75
19	2.99	2.61	2.40	2.27	2.18	2.11	2.06	2.02	1.98	1.96	1.91	1.86	1.81	1.79	1.76	1.73
20	2.97	2.59	2.38	2.25	2.16	2.09	2.04	2.00	1.96	1.94	1.89	1.84	1.79	1.77	1.74	1.71
21	2.96	2.57	2.36	2.23	2.14	2.08	2.02	1.98	1.95	1.92	1.87	1.83	1.78	1.75	1.72	1.69
22	2.95	2.56	2.35	2.22	2.13	2.06	2.01	1.97	1.93	1.90	1.86	1.81	1.76	1.73	1.70	1.67
23	2.94	2.55	2.34	2.21	2.11	2.05	1.99	1.96	1.92	1.89	1.84	1.80	1.74	1.72	1.69	1.66
24	2.93	2.54	2.33	2.19	2.10	2.04	1.98	1.94	1.91	1.88	1.83	1.78	1.73	1.70	1.67	1.64
25	2.92	2.53	2.32	2.18	2.09	2.02	1.97	1.93	1.89	1.87	1.82	1.77	1.72	1.69	1.66	1.63
26	2.91	2.52	2.31	2.17	2.08	2.01	1.96	1.92	1.88	1.86	1.81	1.76	1.71	1.68	1.65	1.61
27	2.90	2.51	2.30	2.17	2.07	2.00	1.95	1.91	1.87	1.85	1.80	1.75	1.70	1.67	1.64	1.60
28	2.89	2.50	2.29	2.16	2.06	2.00	1.94	1.90	1.87	1.84	1.79	1.74	1.69	1.66	1.63	1.59
29	2.89	2.50	2.28	2.15	2.06	1.99	1.93	1.89	1.86	1.83	1.78	1.73	1.68	1.65	1.62	1.58
30	2.88	2.49	2.28	2.14	2.03	1.98	1.93	1.88	1.85	1.82	1.77	1.72	1.67	1.64	1.61	1.57
40	2.84	2.44	2.23	2.09	2.00	1.93	1.87	1.83	1.79	1.76	1.71	1.66	1.61	1.57	1.54	1.51
60	2.79	2.39	2.18	2.04	1.95	1.87	1.82	1.77	1.74	1.71	1.66	1.60	1.54	1.51	1.48	1.44
120	2.75	2.35	2.13	1.99	1.90	1.82	1.77	1.72	1.68	1.65	1.60	1.55	1.48	1.45	1.41	1.37
∞	2.71	2.30	2.08	1.94	1.85	1.77	1.72	1.67	1.63	1.60	1.55	1.49	1.42	1.38	1.34	1.30

Apendice B: Distribucíon t student

gl	Nivel de significancia para pruebas de una cola					
	0.1	0.05	0.025	0.01	0.005	0.0005
	Nivel de significancia para pruebas de dos colas					
	0.2	0.1	0.05	0.02	0.01	0.001
1	3.078	6.314	12.706	31.821	63.657	636.000
2	1.886	2.920	4.303	6.965	9.925	31.599
3	1.638	2.353	3.182	4.541	5.841	12.924
4	1.533	2.132	2.776	3.747	4.604	8.610
5	1.476	2.015	2.571	3.365	4.032	6.869
6	1.440	1.943	2.447	3.143	3.707	5.959
7	1.415	1.895	2.365	2.998	3.499	5.408
8	1.397	1.860	2.306	2.896	3.355	5.041
9	1.383	1.833	2.262	2.821	3.250	4.781
10	1.372	1.812	2.228	2.764	3.169	4.587
11	1.363	1.798	2.201	2.718	3.106	4.437
12	1.356	1.782	2.179	2.681	3.055	4.318
13	1.350	1.771	2.160	2.650	3.012	4.221
14	1.345	1.610	2.145	2.624	2.977	4.140
15	1.341	1.753	2.131	2.602	2.947	4.073
16	1.337	1.746	2.120	2.583	2.921	4.015
17	1.333	1.740	2.110	2.567	2.898	3.965
18	1.330	1.734	2.101	2.552	2.878	3.922
19	1.328	1.729	2.093	2.539	2.861	3.883
20	1.325	1.725	2.086	2.528	2.845	3.850
21	1.323	1.721	2.080	2.515	2.831	3.819
22	1.321	1.717	2.074	2.508	2.819	3.792
23	1.319	1.714	2.069	2.500	2.807	3.768
24	1.318	1.711	2.064	2.492	2.797	3.745
25	1.316	1.708	2.060	2.485	2.787	3.725
26	1.315	1.706	2.056	2.479	2.779	3.707
27	1.314	1.703	2.052	2.473	2.771	3.690
28	1.313	1.701	2.048	2.467	2.763	3.674
29	1.311	1.699	2.045	2.462	2.756	3.659
30	1.310	1.697	2.042	2.457	2.750	3.646
40	1.303	1.684	2.021	2.423	2.704	3.551
60	1.296	1.671	2.000	2.390	2.660	3.460
120	1.289	1.658	1.980	2.358	2.617	3.373
∞	1.282	1.645	1.960	2.326	2.576	3.291

Apendice C: Prueba de Duncan

$$\frac{37.1+51.2+30.4+84.9}{4*2}=25.45$$

5%

f \ p	2	3	4	5	6	7	8	9	10	20	50	100
1	18.00	18.00	18.00	18.00	18.00	18.00	18.00	18.00	18.00	18.00	18.00	18.00
2	6.09	6.09	6.09	6.09	6.09	6.09	6.09	6.09	6.09	6.09	6.09	6.09
3	4.50	4.50	4.50	4.50	4.50	4.50	4.50	4.50	4.50	4.50	4.50	4.50
4	3.93	4.01	4.02	4.02	4.02	4.02	4.00	4.02	4.02	4.02	4.02	4.02
5	3.64	3.74	3.79	3.83	3.83	3.83	4.02	3.83	3.83	3.83	3.83	3.83
6	3.46	3.58	3.64	3.68	3.68	3.68	3.83	3.68	3.68	3.68	3.68	3.68
7	3.35	3.47	3.54	3.58	3.60	3.61	3.68	3.61	3.61	3.61	3.61	3.61
8	3.26	3.39	3.47	3.52	3.55	3.56	3.61	3.56	3.56	3.56	3.56	3.56
9	3.20	3.34	3.41	3.47	3.50	3.52	3.56	3.52	3.52	3.52	3.52	3.52
10	3.15	3.30	3.37	3.43	3.46	3.47	3.52	3.47	3.47	3.48	3.48	3.48
11	3.11	3.27	3.35	3.39	3.43	3.44	3.47	3.46	3.46	3.48	3.48	3.48
12	3.08	3.23	3.33	3.36	3.40	3.42	3.45	3.44	3.46	3.48	3.48	3.48
13	3.06	3.21	3.30	3.35	3.38	3.41	3.44	3.44	3.45	3.47	3.47	3.47
14	3.03	3.18	3.27	3.33	3.37	3.39	3.42	3.42	3.44	3.47	3.47	3.47
15	3.01	3.16	3.25	3.31	3.36	3.38	3.41	3.42	3.43	3.47	3.47	3.47
16	3.00	3.15	3.23	3.30	3.34	3.37	3.40	3.41	3.43	3.47	3.47	3.47
17	2.98	3.13	3.22	3.28	3.33	3.36	3.39	3.40	3.42	3.47	3.47	3.47
18	2.97	3.12	3.21	3.27	3.32	3.35	3.38	3.39	3.41	3.47	3.47	3.47
19	2.96	3.11	3.19	3.26	3.31	3.35	3.37	3.39	3.41	3.47	3.47	3.47
20	2.95	3.10	3.18	3.25	3.30	3.34	3.36	3.38	3.40	3.47	3.47	3.47
30	2.89	3.04	3.12	3.20	3.25	3.29	3.32	3.35	3.37	3.47	3.47	3.47
40	2.86	3.01	3.10	3.17	3.22	3.27	3.30	3.33	3.35	3.47	3.47	3.47
60	2.83	2.98	3.08	3.14	3.20	3.24	3.28	3.31	3.33	3.47	3.48	3.48
120	2.80	2.95	3.05	3.12	3.18	3.22	3.26	3.29	3.32	3.47	3.53	3.53
∞	2.77	2.92	3.02	3.09	3.15	3.19	3.23	3.26	3.29	3.47	3.61	3.67

Apendice D: Puntos porcentuales del estadístico rango estudentizado

1%

	p																		
f	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17	18	19	20
1	90	135	164	186	202	216	227	237	246	253	260	266	272	272	282	286	290	294	298
2	14.00	19.00	22.30	24.70	26.60	28.20	29.50	30.70	31.70	32.60	33.40	31.40	34.80	35.40	36.00	36.50	37.00	37.50	37.90
3	8.26	10.60	12.20	13.30	14.20	15.00	15.60	16.20	16.70	17.10	17.50	17.90	18.20	18.50	18.80	19.10	19.30	19.50	19.80
4	6.51	8.12	9.17	9.96	10.26	11.10	11.50	11.90	12.30	12.60	12.80	13.10	13.30	13.50	13.70	13.90	14.10	14.20	14.40
5	5.70	6.97	7.80	8.42	8.91	9.32	9.67	9.97	10.24	10.48	10.70	10.89	11.08	11.24	11.40	11.55	11.68	11.81	11.93
6	5.24	6.33	7.03	7.56	7.97	8.32	8.61	8.87	9.10	9.30	9.49	9.65	9.81	9.95	10.08	10.21	10.32	10.43	10.54
7	4.95	5.92	6.54	7.01	7.37	7.68	7.94	8.17	8.37	8.55	8.71	8.86	9.00	9.12	9.24	9.35	9.46	9.55	9.65
8	4.74	5.63	6.20	6.63	6.96	7.24	7.47	7.68	7.87	8.03	8.18	8.31	8.44	8.55	8.66	8.76	8.85	8.94	9.03
9	4.60	5.43	5.96	6.35	6.66	6.91	7.13	7.32	7.49	7.65	7.78	7.91	8.03	8.13	8.23	8.32	8.41	8.49	8.57
10	4.48	5.27	5.77	6.14	6.43	6.67	6.87	7.05	7.21	7.36	7.48	7.60	7.71	7.81	7.91	7.99	8.07	8.15	8.22
11	4.39	5.14	5.62	5.97	6.25	6.48	6.67	6.84	6.99	7.13	7.25	7.36	7.46	7.56	7.65	7.73	7.81	7.88	7.95
12	4.32	5.04	5.50	5.84	6.10	6.32	6.51	6.67	6.81	6.94	7.06	7.17	7.26	7.36	7.44	7.52	7.59	7.66	7.73
13	4.26	4.96	5.40	5.73	5.98	6.19	6.37	6.53	6.67	6.79	6.90	7.01	7.10	7.19	7.27	7.34	7.42	7.48	7.55
14	4.21	4.89	5.32	5.63	5.88	6.08	6.26	6.41	6.54	6.66	6.77	6.87	6.96	7.05	7.12	7.20	7.27	7.33	7.39
15	4.17	4.83	5.25	5.56	5.80	5.99	6.16	6.31	6.44	6.55	6.66	6.76	6.84	6.93	7.00	7.07	7.14	7.20	7.26
16	4.13	4.78	5.19	5.49	5.72	5.92	6.08	6.22	6.35	6.46	6.56	6.66	6.74	6.82	6.90	6.97	7.03	7.09	7.15
17	4.10	4.74	5.14	5.43	5.66	5.85	6.01	6.15	6.27	6.38	6.48	6.57	6.66	6.73	6.80	6.87	6.94	7.00	7.05
18	4.07	4.70	5.09	5.38	5.60	5.79	5.94	6.08	6.20	6.31	6.41	6.50	6.58	6.65	6.72	6.79	6.85	6.91	6.96
19	4.05	4.67	5.05	5.33	5.55	5.73	5.89	6.02	6.14	6.25	6.34	6.43	6.51	6.58	6.65	6.72	6.78	6.84	6.89
20	4.02	4.64	5.02	5.29	5.51	5.69	5.84	5.97	6.09	6.19	6.29	6.37	6.45	6.52	6.59	6.65	6.71	6.76	6.82
24	3.96	4.54	4.91	5.17	5.37	5.54	5.69	5.81	5.92	6.02	6.11	6.19	6.26	6.33	6.39	6.45	6.51	6.56	6.61
30	3.89	4.45	4.80	5.05	5.24	5.40	5.54	5.65	5.76	5.85	5.93	6.01	6.08	6.14	6.20	6.26	6.31	6.36	6.41
40	3.82	4.37	4.70	4.93	5.11	5.27	5.39	5.50	5.60	5.69	5.77	5.84	5.90	5.96	6.02	6.07	6.12	6.17	6.21
60	3.76	4.28	4.60	4.82	4.99	5.13	5.25	5.36	5.45	5.53	5.60	5.67	5.73	5.79	5.84	5.89	5.93	5.98	6.02
120	3.70	4.20	4.50	4.71	4.87	5.01	5.12	5.21	5.30	5.38	5.44	5.51	5.56	5.61	5.66	5.71	5.75	5.79	5.83
∞	3.64	4.12	4.40	4.60	4.76	4.88	4.99	5.08	5.16	5.23	5.29	5.35	5.40	5.45	5.49	5.54	5.57	5.61	5.65

5%

	p																		
f	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17	18	19	20
1	18.1	26.7	32.8	37.2	40.5	43.1	45.4	47.3	49.1	50.6	51.9	53.2	54.3	55.4	56.3	57.2	58	58.8	59.6
2	6.09	8.28	9.80	10.89	11.73	12.43	13.03	13.54	13.99	14.39	14.75	15.08	15.38	15.65	15.91	16.14	16.36	16.57	16.77
3	4.50	5.88	6.83	7.51	8.04	8.47	8.85	9.18	9.46	9.72	9.95	10.16	10.35	10.52	10.69	10.84	10.98	11.12	11.24
4	3.93	5.00	5.76	6.31	6.73	7.06	7.35	7.60	7.83	8.03	8.21	8.37	8.52	8.67	8.80	8.92	9.03	9.14	9.24
5	3.64	4.60	5.22	5.67	6.03	6.33	6.58	6.80	6.99	7.17	7.32	7.47	7.60	7.72	7.83	7.93	8.03	8.12	8.21
6	3.46	4.34	4.90	5.31	5.63	5.89	6.12	6.32	6.49	6.65	6.79	6.92	7.04	7.14	7.24	7.34	7.43	7.51	7.59
7	3.34	4.16	4.68	5.06	5.35	5.59	5.80	5.99	6.15	6.29	6.42	6.54	6.65	6.75	6.84	6.93	7.01	7.08	7.16
8	3.26	4.04	4.53	4.89	5.17	5.40	5.60	5.77	5.92	6.05	6.18	6.29	6.39	6.48	6.57	6.65	6.73	6.80	6.87
9	3.20	3.95	4.44	4.76	50.02	5.24	5.43	5.60	5.74	5.87	5.98	6.09	6.19	6.28	6.36	6.44	6.51	6.58	6.65
10	3.15	3.88	4.33	4.66	4.91	5.12	5.30	5.46	5.60	5.72	5.83	5.93	6.03	6.12	6.20	6.27	6.34	6.41	6.47
11	3.11	3.82	4.26	4.58	4.82	5.03	5.20	5.35	5.49	5.61	5.71	5.81	5.90	5.98	6.06	6.14	6.20	6.27	6.33
12	3.08	3.77	4.20	4.51	4.75	4.95	5.12	5.27	5.40	5.51	5.61	5.71	5.80	5.88	5.95	6.02	6.09	6.15	6.21
13	3.06	3.73	4.15	4.46	4.69	4.88	5.05	5.19	5.32	5.43	5.53	5.63	5.71	5.79	5.86	5.93	6.00	6.06	6.11
14	3.03	3.70	4.11	4.41	4.64	4.83	4.99	5.13	5.25	5.36	5.46	5.56	5.64	5.72	5.79	5.86	5.92	5.98	6.03
15	3.01	3.67	4.08	4.37	4.59	4.78	4.94	5.08	5.20	5.31	5.40	4.49	5.57	5.65	5.72	5.79	5.85	5.91	5.96
16	3.00	3.65	4.05	4.34	4.56	4.74	4.90	5.03	5.15	5.26	5.35	5.44	5.52	5.59	5.66	5.73	5.79	5.84	5.90
17	2.98	6.62	4.02	4.31	4.52	4.70	4.86	4.99	5.11	5.21	5.31	5.39	5.47	5.55	5.61	5.68	5.74	5.79	5.84
18	2.97	6.61	4.00	4.28	4.49	4.67	4.83	4.96	5.07	5.17	5.27	5.35	5.43	5.50	5.57	5.63	5.69	5.74	5.79
19	2.96	3.59	3.98	4.26	4.47	4.64	4.79	4.92	5.04	5.14	5.23	5.32	5.39	5.46	5.53	5.59	5.65	5.70	5.75
20	2.95	3.58	3.96	4.24	4.45	4.62	4.77	4.90	5.01	5.11	5.20	5.28	5.36	5.43	5.50	5.56	5.61	5.66	5.71
24	2.92	3.53	3.90	4.17	4.37	4.54	4.68	4.81	4.92	5.01	5.10	5.18	5.25	5.32	5.38	5.44	5.50	5.55	5.59
30	2.89	3.48	3.84	4.11	4.30	4.46	4.60	4.72	4.83	4.92	5.00	5.08	5.15	5.21	5.27	5.33	5.38	5.43	5.48
40	2.86	3.44	3.79	4.04	4.23	4.39	5.52	4.63	4.74	4.82	4.90	4.98	5.05	5.11	5.17	5.22	5.27	5.32	5.36
60	2.83	3.40	3.74	3.98	4.16	4.31	4.44	4.55	4.65	4.73	4.81	4.88	4.94	5.00	5.06	5.11	5.15	5.20	5.24
120	2.80	3.36	3.69	3.92	4.10	4.24	4.36	4.47	4.56	4.64	4.71	4.78	4.84	4.90	4.95	5.00	5.04	5.09	5.13
∞	2.77	3.32	3.63	3.86	4.03	4.17	4.29	4.39	4.47	4.55	4.62	4.68	4.74	4.80	4.84	4.98	4.93	4.97	5.01

Apendice E: desglose de la suma de cuadros del error.

Si en la ecuación 4.6 para la suma de cuadrados de la intearacción se sustituyen los términos de las ecuaciones correspondientes quedaría:

$$SC_{AB} = \left[\sum_{i=1}^{a}\sum_{j=1}^{b}\frac{y^2_{ij}}{n} - \frac{y^2_{...}}{abn}\right] - \left[\sum_{i=1}^{a}\frac{y^2_{.j.}}{an} - \frac{y^2_{...}}{abn}\right]$$

$$= (4.5) - (4.3) - (4.4)$$

Si se eliminan signos de agrupación y los términos semejantes quedaría:

$$SC_{AB} = \sum_{i=1}^{a}\sum_{j=1}^{b}\frac{y^2_{...}}{n} - \cancel{\frac{y^2_{...}}{abn}} - \sum_{i=1}^{a}\frac{y^2_{.i.}}{bn} + \cancel{\frac{y^2_{...}}{abn}} - \sum_{j=1}^{b}\frac{y^2_{.j.}}{an} + \frac{y^2_{...}}{abn}$$

$$SC_{AB} = \sum_{i=1}^{a}\sum_{j=1}^{b}\frac{y^2_{ij.}}{n} - \frac{y^2_{i..}}{bn} - \sum_{i=1}^{a}\frac{y^2_{.i.}}{bn} - \sum_{j=1}^{b}\frac{y^2_{.j.}}{an} + \frac{y^2_{...}}{abn}$$

La ecuación 4.8 se obtiene a partir de despejar el término del error de la ecuación 4.1.

$SC_{TOTAL} = SC_A + SC_B + SC_{AB} + SC_{ERROR}$ (4.1)

$SC_{ERROR} = SC_{TOTAL} + SC_A + SC_B + SC_{AB}$ (4.1 A)

Si se sustituye cada término por su respectiva ecuación quedaría:

$$= \left[\sum_{i=1}^{a}\sum_{j=1}^{b}\sum_{k=1}^{n} y^2_{ijk} - \frac{y^2_{...}}{abn}\right] - \left[\sum_{i=1}^{a}\frac{y^2_{i...}}{bn} - \frac{y^2_{...}}{abn}\right] - \left[\sum_{j=1}^{b}\frac{y^2_{.j.}}{an} - \frac{y^2_{...}}{abn}\right] - \left[\sum_{i=1}^{a}\sum_{j=1}^{b}\frac{y^2_{ij.}}{n} - \sum_{i=1}^{a}\frac{y^2_{i...}}{bn} - \sum_{j=1}^{b}\frac{y^2_{.j.}}{an} + \frac{y^2_{...}}{abn}\right]$$

$$= \quad (5.2) \quad - \quad (5.3) \quad - \quad (5.4) \quad - \quad (5.9)$$

Eliminando signos de agrupación:

$$= \sum_{i=1}^{a}\sum_{j=1}^{b}\sum_{k=1}^{n} y^2_{ikj} - \frac{y^2_{...}}{abn} - \sum_{i=1}^{a}\frac{y^2_{i..}}{bn} + \frac{y^2_{...}}{abn} - \sum_{j=1}^{b}\frac{y^2_{.j.}}{an} + \frac{y^2_{...}}{abn} - \sum_{i=1}^{a}\sum_{j=1}^{b}\frac{y^2_{i..}}{n} + \sum_{i=1}^{a}\frac{y^2_{i..}}{bn}\sum_{j=1}^{b}\frac{y^2_{.j.}}{an} - \frac{y^2_{...}}{abn}$$

Eliminando términos semejantes:

$$= \sum_{i=1}^{a}\sum_{j=1}^{b}\sum_{k=1}^{n} y^2_{ijk} - \cancel{\frac{y^2_{...}}{abn}} - \sum_{i=1}^{a}\cancel{\frac{y^2_{i..}}{bn}} + \cancel{\frac{y^2_{...}}{abn}} - \sum_{j=1}^{b}\cancel{\frac{y^2_{.j.}}{an}} + \cancel{\frac{y^2_{...}}{abn}} - \sum_{i=1}^{a}\sum_{j=1}^{b}\frac{y^2_{ij.}}{n} + \sum_{i=1}^{a}\cancel{\frac{y^2_{i..}}{bn}} + \sum_{j=1}^{b}\cancel{\frac{y^2_{.j.}}{an}} - \cancel{\frac{y^2_{...}}{abn}}$$

$$SC_{ERROR} = \sum_{i=1}^{a}\sum_{j=1}^{b}\sum_{k=1}^{n} y^2_{ijk} - \sum_{i=1}^{a}\sum_{j=1}^{b}\frac{y_{ij.}}{n} \quad (4.8)$$

Bibliografia

Gutiérrez-Pulido, H. y De la Vara Salazar, R.(2003). Control Estadístico de Calidad y Seis Sigma. McGraw-Hill.

Gutiérrez-Pulido, H. y De la Vara Salazar, R.(2003). Análisis y Diseño de Experimentos. McGraw-Hill.

Martínez-Garza, A. Diseños Experimentales Métodos y Elementos de teoría. (1988). Trillas

Montgomery D. C. (1991). Design and Analysis of Experiments. Third Edition. Wiley, New York.

R. O. Kuehl (2001). DISEÑO DE EXPERIMENTOS. Principios estadísticos para el análisis y diseño de investigaciones. Thomson.

Un problema fundamental en la enseñanza- aprendizaje de una materia es que no se cuentan con un libro adecuado al programa. Un libro que le sea útil al profesor en su enseñanza del curso y al mismo tiempo le permita implementar estrategias de enseñanza. Un libro que le facilite el conocimiento al estudiante y le evite la realización engorrosa de apuntes. Esos son los objetivos del presente texto, el ser un recurso didáctico que auxilie en la enseñanza a los profesores que imparten la materia de Elementos de Diseño de Experimentos, de la Universidad de Guadalajara. El libro está estructurado con siete capítulos cuyo orden sistemático representa una guía-metodológica de la enseñanza del curso, misma que es resultado de la experiencia de años por los autores con la cual se han obtenido magníficos resultados. Los Capítulos contenidos en este texto son: El Capitulo 1: Introducción Al Diseño De Experimentos, donde se habla de los principios del diseño de experimentos y sus directrices. El Capitulo 2: Diseño de un Solo Factor, en el que se incluye los procedimientos del análisis de varianza y las pruebas de comparación múltiple. El Capitulo 3 se encuentra el Diseño En Bloques Aleatorizados, con su respectivo Anova, modelo y supuestos. El Capitulo 4 corresponde al Diseño Multifactorial Para Dos Factores donde además del Anova se incluye el concepto de interacción de factores. En el Capitulo 5 es para el Diseño Multifactorial Para Tres Factores, con un amplio contenido de tablas y procedimientos que facilitan la obtención del Anova. Los Diseños 2^2 y 2^3 corresponden a los capítulos 6 y 7, respectivamente, en ambos diseños se ilustran los cálculos y sus aplicaciones mediante ejemplos resueltos. Al final de cada capítulo hemos agregado salidas de resultados usando el Statgraphics Centurión.

Esperamos que con este texto, los estudiantes encuentren en el texto una guía de aprendizaje, un complemento de la enseñanza de su profesor con una serie de ejercicios que les permita practicar lo aprendido.

ISBN 978607777202-6

9 786077 772026

astra
ediciones